

Skript zur Vorlesung

Das kleine Finite-Elemente-Skript

Prof. Dr. Ansgar Jüngel

Sommersemester 2001

(Version vom 02.08.2004; Fehler bitte per E-Mail an
juengel@mathematik.uni-mainz.de)

1	Einleitung	2
2	Elliptische Differentialgleichungen	11
3	Sobolev-Räume	15
4	Schwache Lösungen elliptischer Randwertprobleme	24
5	Die Ritz-Galerkin-Methode	38
6	Finite-Elemente-Räume	42
7	Fehlerabschätzung in $H^1(\Omega)$	57
8	Fehlerabschätzung in $L^2(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$	69
	Übungsaufgaben	77
	Literatur	79

1 Einleitung

Ziel dieses Skriptes ist es, eine Klasse von partiellen Differentialgleichungen, nämlich sogenannte elliptische Differentialgleichungen, mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente zu approximieren und numerisch zu lösen. Dafür benötigen wir einige analytische Techniken, die zu Beginn bereitgestellt werden. Parallel zu einer gründlichen Analysis der Finite-Elemente-Methode gehen wir auf die praktische Realisierung und Implementierung dieser Methode ein. Der grobe Aufbau des Skriptes ist also:

- Motivation,
- elliptische Differentialgleichungen und Sobolevräume,
- numerische Analysis der Finite-Elemente-Methode,
- zur Implementierung der Finite-Elemente-Methode.

In welchen Anwendungen treten elliptische Differentialgleichungen auf? Dazu zwei Beispiele:

Beispiel 1.1 (Temperaturverteilung in einem beheizten Raum) Betrachte den zweidimensionalen Schnitt eines Raumes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wie in Abbildung 1.1 mit einem Fenster D_1 und einem (unendlich dünnen) Heizkörper D_2 . Wir nehmen an, daß die Wände und Decke N_1 partiell isolierend und der Boden N_2 total isolierend

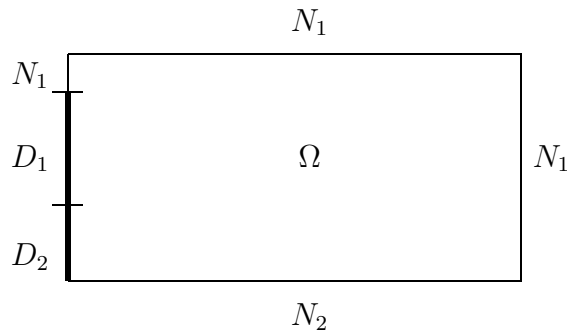


Abbildung 1.1: Schnitt eines Raumes.

sind. Sei $u = u(x_1, x_2)$ die Temperatur in Ω und $J = (J_1, J_2)$ der Wärmestrom. Die zeitliche Änderung der Temperatur ist gleich der räumlichen Änderung des Wärmestromes, genauer:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} J = \frac{\partial J_1}{\partial x_1} + \frac{\partial J_2}{\partial x_2} \quad \text{in } \Omega, \quad t > 0.$$

Wir nehmen weiter an, daß der Wärmestrom vollständig durch Wärmediffusion gegeben ist: $J = \nabla u = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2)$. Wir betrachten Situationen, in denen sich die Temperatur zeitlich nicht mehr ändert, d.h. $\partial u / \partial t = 0$. Dann lautet die zu lösende Differentialgleichung

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1.1)$$

Dies ist eine *elliptische Differentialgleichung* (zur Definition siehe Kapitel 2), für die wir noch Randbedingungen für u benötigen. Wir nehmen an, daß die Temperatur des Fensters immer konstant ist:

$$u = u_F \quad \text{auf } D_1. \quad (1.2)$$

Ist die Raumtemperatur größer als u_F , geht also Wärme durch das Fenster verloren. Die Heizung habe die Temperatur u_H :

$$u = u_H \quad \text{auf } D_2. \quad (1.3)$$

Der Boden des Raumes ist als (total) isolierend angenommen. Dies bedeutet, daß es keinen Wärmestrom durch den Boden gibt oder, mathematisch ausgedrückt, daß die Normalkomponente des Stromes null ist:

$$\nabla u \cdot \nu = J \cdot \nu = 0 \quad \text{auf } N_2, \quad (1.4)$$

wobei ν den äußeren Normalenvektor entlang $\partial\Omega$ bezeichnet. Die Wände und Decke sind partiell isolierend, es kann also etwas Wärme verloren gehen:

$$\nabla u \cdot \nu + \alpha(u - u_F) = 0 \quad \text{auf } N_1, \quad (1.5)$$

wobei $\alpha \geq 0$ der Koeffizient des Wärmeverlustes ist.

Die Gleichungen (1.1)-(1.5) bilden ein *elliptisches Randwertproblem*. Wenn die Heizung so kalt wie das Fenster ist, d.h. $u_H = u_F$, gibt es eine einfache Lösung, nämlich $u(x_1, x_2) = u_F = \text{const.}$ in Ω . Im allgemeinen Fall ist es nicht so einfach, explizite Lösungen anzugeben, und wir sind auf numerische Lösungen angewiesen. Wie diese gefunden werden können, ist Ziel dieses Skriptes.

Ein Beispiel einer Lösung mit $u_F = 10^\circ\text{C}$, $u_H = 70^\circ\text{C}$ und $\alpha = 0.05$ ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Die Temperatur vor der rechten Wand des Zimmers beträgt ungefähr 20°C .

Beispiel 1.2 (Akustik im Autoinneren) In der Fahrgastzelle eines Autos können während des Fahrens unangenehme Geräusche auftreten, die Autohersteller zu minimieren versuchen. Wir betrachten zur Vereinfachung einen zweidimensionalen Schnitt Ω durch einen Autoinnenraum wie in Abbildung 1.3, in der Vorder- und Rücksitze schematisch zu erkennen sind. Wir wollen die ste-

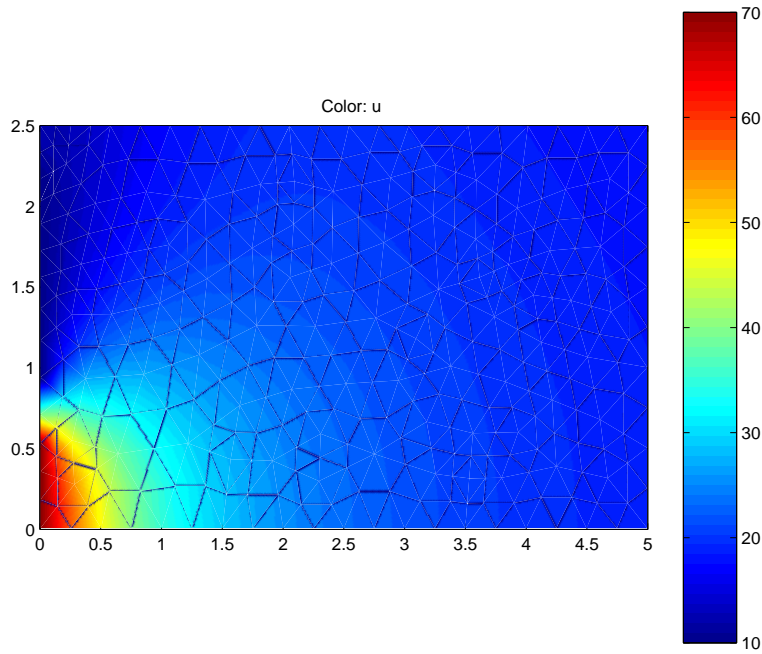


Abbildung 1.2: Temperaturverteilung in einem beheizten Raum.

henden Wellen und die Eigenfrequenzen des Autoinnenraumes berechnen. Die Fahrgeräusche setzen sich aus diesen Wellen zusammen. Sei $v = v(x_1, x_2, t)$ die Druckdifferenz der Luft gegenüber dem Normaldruck. Dann beschreibt $|v|$ die Lautstärke. Die zeitliche Entwicklung von v ist durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta v \quad \text{in } \Omega, \quad t > 0. \quad (1.6)$$

Wir sind daran interessiert, ob es Lösungen v mit der Frequenz $\omega \geq 0$ gibt, d.h., wir machen den Ansatz

$$v(x_1, x_2, t) = e^{i\omega t} u(x_1, x_2)$$

(mit $i^2 = -1$), setzen ihn in Gleichung (1.6) ein und erhalten mit $\lambda := \omega^2 \geq 0$:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1.7)$$

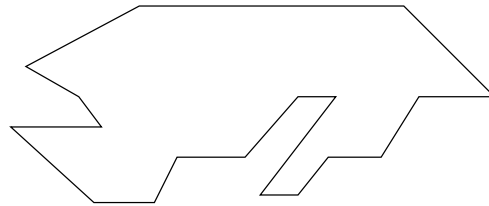


Abbildung 1.3: Schnitt durch einen Autoinnenraum.

Wir nehmen an, daß die Wände des Innenraumes akustisch hart sind:

$$\nabla u \cdot \nu = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (1.8)$$

Die Gleichungen (1.7)-(1.8) bilden ebenfalls ein *elliptisches Randwertproblem*. Dieses ist übrigens nicht eindeutig lösbar: Eine Lösung lautet $u = 0$ in Ω , aber es gibt zu bestimmten $\lambda > 0$ (nicht zu allen!) noch eine Lösung. Schreiben wir $L := -\Delta$, so kann man (1.7) als

$$Lu = \lambda u$$

schreiben, und wir erkennen, daß wir es mit einem Eigenwertproblem zu tun haben. Daher ist es plausibel, daß man Lösungen $u \neq 0$ für bestimmte $\lambda > 0$ erwarten kann. Die Eigenwerte λ sind die (quadratierten) Eigenfrequenzen des Autoinnenraumes, die Fahrgeräusche sind aus den entsprechenden Eigenfunktionen zusammengesetzt.

Ein Beispiel einer Lösung u mit $\lambda = 2.5915$ ist in Abbildung 1.4 dargestellt. In der Nähe der Stelle, an der sich das Ohr einer Person auf dem Vordersitz befindet, ist $|u| \approx 0.02$; an der entsprechenden Stelle auf dem Rücksitz ist dagegen $|u| \approx 0.05$. Dies bedeutet, daß der Ton mit der Frequenz $\omega = \sqrt{\lambda}$ stärker auf den Rücksitzen wahrgenommen wird.

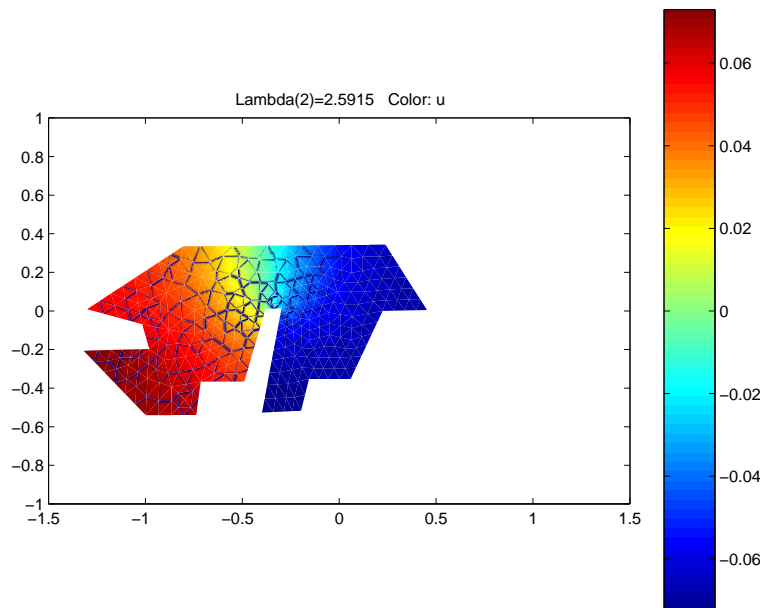


Abbildung 1.4: Druckdifferenz zur Eigenfrequenz $\lambda = 2.5915$.

Wie können wir nun elliptische Randwertprobleme wie in den obigen Beispielen lösen? Betrachte das einfache Beispiel

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (1.9)$$

ebenfalls ein elliptisches Randwertproblem. Zuerst könnten wir auf die Idee kommen, das Problem (1.9) mittels der Methode der Finiten Differenzen zu lösen. Diese Methode basiert darauf, die Differentialquotienten durch entsprechende Differenzenquotienten zu ersetzen. Um die Berechnungen zu vereinfachen, setzen wir $\Omega = (0, 1)^2$ und führen äquidistante Stützstellen $(x_i, y_i) \in \Omega$ ($i, j = 0, \dots, N$) mit $h = x_{i+1} - x_i = y_{i+1} - y_i$ ($i = 0, \dots, N - 1$) ein. Wir suchen Approximationen u_{ij} von $u(x_i, y_j)$. Addition von

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}, y_j) &= u(x_i, y_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)h^2 + O(h^3), \\ u(x_{i-1}, y_j) &= u(x_i, y_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)h^2 + O(h^3) \end{aligned}$$

führt auf

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2} (u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)) + O(h),$$

und analog

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2} (u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})) + O(h),$$

so daß es sinnvoll ist,

$$\Delta u(x_i, y_j) \approx \frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, N - 1,$$

zu approximieren. Setzen wir $f_{ij} = f(x_i, y_j)$, müssen wir also die folgende Differenzgleichung lösen:

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} &= h^2 f_{ij}, \quad (x_i, y_j) \in \Omega, \\ u_{ij} &= 0, \quad (x_i, y_j) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wir können dieses Problem in Matrixschreibweise formulieren, indem wir die u_{ij} lexikographisch anordnen, d.h., indem wir definieren:

$$U_k := u_{ij}, \quad F_k := f_{ij} \quad \text{mit } k = iN + j.$$

Dann ist die obige Differenzgleichung äquivalent zu

$$AU = F$$

mit der Matrix

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} A_0 & I & & & 0 \\ I & A_0 & I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & I & A_0 & I \\ 0 & & & I & A_0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & & 0 \\ 1 & -4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -4 & 1 \\ 0 & & & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

wobei I die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ bezeichne. Die Matrix A hat den Vorteil, nur wenige von Null verschiedene Elemente zu besitzen, also *schwachbesetzt* zu sein. Die entsprechenden Gleichungssysteme kann man dann effizient lösen. Differenzenverfahren haben allerdings eine Reihe von Nachteilen:

- Die Differenzgleichungen werden kompliziert bei nichtäquidistanten Stützstellen und nicht-einfachen Gebieten wie in Beispiel 1.2.
- Wir brauchen Lösungen, deren dritte Ableitung existiert, um die Differenzgleichungen herzuleiten.
- Die Finite-Differenzen-Methode ist nicht (ohne weiteres) anwendbar, wenn f unstetig ist.

Die Methode der Finiten Elemente ist sehr flexibel und vermeidet die meisten der obigen Nachteile. Allerdings ist sie etwas komplizierter und benötigt einige theoretische Grundlagen. Die Idee dieser Methode ist wie folgt: Wir multiplizieren Gleichung (1.9) mit einer Funktion $v \in C^1(\bar{\Omega})$, $v = 0$ auf $\partial\Omega$, und verwenden den Divergenzatz (wobei wir annehmen, daß der Rand $\partial\Omega$ glatt genug ist):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v \, dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) v \, dx \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) \, dx - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \nu \, dx - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

Wir suchen eine Funktion $u \in X$, so daß für alle $v \in X$ gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} f v \, dx, \quad (1.10)$$

wobei der Raum X alle $C^1(\bar{\Omega})$ -Funktionen, die auf $\partial\Omega$ verschwinden, enthalte, aber vorerst un spezifiziert bleibt (siehe unten). Man nennt (1.10) die *schwache Formulierung* von (1.9), da wir nur einmal und nicht zweimal differenzierbare Lösungen suchen.

Als Approximation von (1.10) suchen wir Lösungen von endlichdimensionalen Problemen. Sei dafür (X_h) eine Folge endlichdimensionaler Räume mit $X_h \rightarrow X$ ($h \rightarrow 0$) in einem gewissen Sinne. Die Elemente von X_h sollen auf $\partial\Omega$ verschwinden. Wir suchen eine Approximation u_h von u , so daß für alle $v \in X_h$ gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (1.11)$$

Dies ist äquivalent zu einem linearen Gleichungssystem. Sei nämlich (ϕ_1, \dots, ϕ_N) eine Basis von X_h . Wir setzen die Zerlegung

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i$$

in (1.11) ein und wählen $v = \phi_j$:

$$\sum_{i=1}^N u_i \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx = - \int_{\Omega} f \phi_j \, dx.$$

Mit den Abkürzungen

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx, \quad F_j = - \int_{\Omega} f \phi_j \, dx$$

folgt

$$\sum_{i=1}^N A_{ij} u_i = F_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Wählt man eine Basis (ϕ_1, \dots, ϕ_N) , so daß möglichst viele $A_{ij} = 0$ sind, so ist dieses Gleichungssystem effizient lösbar. Allerdings stellen sich einige Fragen:

- Wie sollen die Räume X und X_h definiert werden?
- Welche Basiselemente ϕ_i müssen gewählt werden, damit (A_{ij}) möglichst schwachbesetzt ist?

Zur ersten Frage: Für die Analysis ist es sinnvoll, für X und X_h Banachräume zu verwenden. Wir sind versucht zu definieren:

$$X = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_X = \left[\int_{\Omega} (u(x)^2 + |\nabla u(x)|^2) \, dx \right]^{1/2}.$$

Leider ist das kein Banachraum. Dies sieht man folgendermaßen ein: Sei zur Vereinfachung $\Omega = (-1, 1)$ und definiere

$$u_n(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad x \in \Omega, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $u_n \in X$ und

$$u_n(x) \rightarrow u(x) := 1 - |x| \quad \text{punktweise in } \Omega \quad (n \rightarrow \infty).$$

Man kann zeigen (Übungsaufgabe), daß

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty).$$

Allerdings ist $u \notin X$, d.h., X ist nicht vollständig. Wir brauchen also einen anderen Funktionenraum. Eine Idee ist, X zu vervollständigen:

$$V := \text{Vervollständigung von } X \text{ in } \|\cdot\|_X.$$

Diesen Raum werden wir in Kapitel 2 genauer charakterisieren.

Zur zweiten Frage: Eine Möglichkeit wäre, die Basiselemente $\phi_j(x) = \sin(j\pi x)$, $x \in \Omega = (-1, 1)$, $j = 1, \dots, N$, zu verwenden. Dies hat den Vorteil, daß wegen

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx = 0 \quad \forall i \neq j$$

die Matrix (A_{ij}) diagonal und das lineare Gleichungssystem sehr einfach zu lösen ist. Leider kann man diese Idee nicht ohne weiteres auf mehrdimensionale Räume verallgemeinern, da dann meistens $\phi_j \neq 0$ auf $\partial\Omega$ und damit $\phi_j \notin X_h$ gilt. Eine andere Idee ist es, Basiselemente ϕ_j mit möglichst kleinem Träger

$$\text{supp } \phi_j := \overline{\{x \in \Omega : \phi_j(x) \neq 0\}}$$

zu definieren. Sei Ω polygonal berandet und zerlege Ω in abgeschlossene Dreiecke, also $\bar{\Omega} = \bigcup_{\tau \in T} \tau$, wobei T die Menge der Ω zerlegenden Dreiecke sei (siehe Abbildung 1.5). Seien b_1, \dots, b_N die Ecken aller Dreiecke in Ω und definiere ϕ_1, \dots, ϕ_N

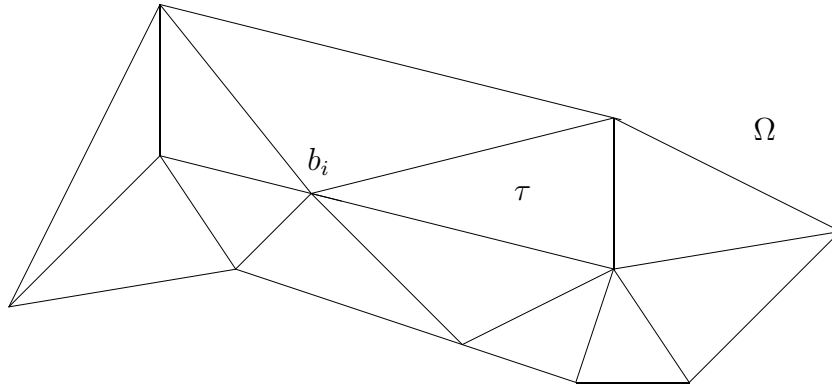


Abbildung 1.5: Zerlegung eines Gebietes in Dreiecke.

eindeutig durch

$$\phi_j(b_i) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, N) \quad \text{und} \quad \phi_j \text{ linear in allen } \tau \in T.$$

Das bedeutet, daß die ϕ_j stückweise linear sind. Nun gilt

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx \neq 0 \Leftrightarrow b_i \text{ und } b_j \text{ sind benachbart.}$$

Unter “benachbart” verstehen wir, daß es ein $\tau \in T$ gibt, so daß $b_i \in \tau$ und $b_j \in \tau$. Die Matrix (A_{ij}) ist also (relativ) schwachbesetzt. Natürlich gibt es noch andere Möglichkeiten, die Basiselemente zu definieren.

Damit haben wir die Kernpunkte von Finite-Elemente-Methoden charakterisiert:

- Finde eine schwache Formulierung der Differentialgleichung.
- Zerlege das Gebiet in Teilgebiete (z.B. Dreiecke) und bestimme die Basiselemente.
- Stelle das lineare Gleichungssystem auf und löse es.

Insbesondere werden wir die folgenden Fragen beantworten:

- Wie sind elliptische Differentialgleichungen definiert? (Antwort in Kapitel 2.)
- Welche Funktionen enthält der abstrakt definierte Raum V ? (Antwort in Kapitel 3.)
- Was ist eine schwache Formulierung genau? (Antwort in Kapitel 4.)
- Welche Basisfunktionen kann man verwenden? (Antwort in Kapitel 6.)
- Gilt $u_h \rightarrow u$ in X ($h \rightarrow 0$)? Wie groß ist der Fehler $\|u_h - u\|_X$ genau? (Antwort in Kapitel 7.)

2 Elliptische Differentialgleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) eine offene Menge und $u \in C^k(\Omega)$. Wir schreiben partielle Ableitungen von u in der Form

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex und $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ ist.

Eine lineare partielle Differentialgleichung k -ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad x \in \Omega,$$

wobei $a_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ beliebige Funktionen sind. Wir betrachten nur lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung ($k = 2$). Diese können wir wie folgt schreiben:

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.1)$$

Wir setzen voraus, daß $a_{ij} = a_{ji}$ gilt (ansonsten benennen wir wegen der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen für C^2 -Funktionen die Koeffizienten um).

Definition 2.1 (1) Die Differentialgleichung (2.1) heißt elliptisch in $x \in \Omega$ genau dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix $(a_{ij}(x))$ (ungleich null sind und) dasselbe Vorzeichen haben.

(2) Die Differentialgleichung (2.1) heißt elliptisch (in Ω) genau dann, wenn sie elliptisch in (fast) allen $x \in \Omega$ ist.

Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß die Eigenwerte ein positives Vorzeichen haben (ansonsten a_i , a und f durch $-a_i$, $-a$ und $-f$ ersetzen). Daher gilt:

(2.1) ist elliptisch in $x \in \Omega \Leftrightarrow (a_{ij}(x))$ ist positiv definit.

Ein wichtiges Beispiel einer elliptischen Differentialgleichung, das wir bereits in Kapitel 1 kennengelernt haben, ist die *Poisson-Gleichung*

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.2)$$

In diesem Fall ist die Matrix (a_{ij}) gerade die Einheitsmatrix. Eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (*klassische*) Lösung von (2.1), wenn $u \in C^2(\Omega)$ und u erfüllt (2.1).

Eine Differentialgleichung hat, wenn sie lösbar ist, im allgemeinen unendlich viele Lösungen. Beispielsweise ist mit $u(x)$ auch $u(x) + c_1 x_1 + \cdots + c_d x_d + c$

($c, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$) Lösung von (2.2). Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen braucht man noch Nebenbedingungen, etwa Bedingungen an die Lösung auf $\partial\Omega$ oder im Unendlichen (wenn Ω unbeschränkt ist). Wir beschränken uns im wesentlichen auf beschränkte Gebiete (denn unbeschränkte Gebiete müssen im Computer ohnehin durch beschränkte approximiert werden) und folgende physikalisch relevante Randbedingungen:

1. Dirichlet-Randbedingung: $u = g(x)$ auf $\partial\Omega$;
2. Neumann-Randbedingung: $\nabla u \cdot \nu = g(x)$ auf $\partial\Omega$;
3. Robin-Randbedingung: $\nabla u \cdot \nu + \alpha(x)u = g(x)$ auf $\partial\Omega$.

Die Randbedingungen können auch kombiniert werden (siehe Beispiel 1.1 in Kapitel 1); ein Beispiel sind gemischte Dirichlet-Neumann-Randbedingungen:

$$u = g_1(x) \text{ auf } \Gamma_1, \quad \nabla u \cdot \nu = g_2(x) \text{ auf } \Gamma_2,$$

wobei $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ und $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Definition 2.2 Wir nennen das Problem, bestehend aus der Differentialgleichung (2.1) und einer der obigen Randbedingungen oder deren Kombinationen, ein elliptisches Randwertproblem. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ heißt (klassische) Lösung eines elliptischen Randwertproblems, wenn sie die Differentialgleichung (2.1) löst und die entsprechenden Randbedingungen erfüllt. Im Falle von Dirichlet-Randbedingungen genügt $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Es stellt sich nun die Frage, ob elliptische Randwertprobleme immer (klassische) Lösungen besitzen, und wenn ja, ob die Lösung eindeutig ist. Die Antwort ist: im allgemeinen nein. Was kann passieren? Dazu einige Beispiele.

Beispiel 2.3 (Unstetige rechte Seite) Betrachte das Problem

$$u'' = f(x) \text{ in } \Omega = (-1, 1), \quad u(-1) = 0, \quad u(1) = 1,$$

mit $f(x) = -1$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 0$. Die Lösung

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & : x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & : x \geq 0 \end{cases}$$

erfüllt $u \in C^1(\overline{\Omega})$, aber $u \notin C^2(\Omega)$. Das ist klar, denn wäre $u \in C^2(\Omega)$, so müsste auch $f = u'' \in C^0(\Omega)$ gelten – Widerspruch.

Beispiel 2.4 (Unbeschränktes Gebiet) Das Randwertproblem

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega = \{0\} \times \mathbb{R}$$

besitzt unendlich viele Lösungen

$$u(x_1, x_2) = cx_1, \quad (x_1, x_2) \in \Omega,$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.5 (Neumann-Randbedingungen) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein beschränktes Gebiet, $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und $g \in C^0(\partial\Omega)$. Es gelte

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx \neq \int_{\partial\Omega} g(s) \, ds.$$

Dann besitzt das Randwertproblem

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad \nabla u \cdot \nu = g \text{ auf } \partial\Omega$$

keine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, denn ansonsten folgt aus dem Divergenzatz

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u)(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u(s) \cdot \nu \, ds = \int_{\partial\Omega} g(s) \, ds.$$

Existiert dagegen eine Lösung u , so gibt es unendlich viele, denn $u + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ sind auch Lösungen.

Wir beenden dieses Kapitel mit einem Beispiel einer *nichtlinearen* elliptischen Differentialgleichung.

Beispiel 2.6 (Elektronenverteilung in einem Halbleiter) Wir wollen die Elektronenverteilung in einem Halbleiterbauelement, durch das kein Strom fließt, berechnen. Ein Halbleiter ist ein Material, das bei Energiezufuhr (z.B. Wärme, Licht) leitend wird. Beispiele sind Silizium, Germanium und Gallium-Arsenid. Ein Halbleiterbauelement ist mit zusätzlichen, festen geladenen Atomen versetzt (Dotierung). Diese Dotierung charakterisiert die Funktionsweise des Bauteils.

Die Elektronendichte in dem Halbleiter Ω sei mit $n(x)$ bezeichnet. Da Elektronen elektrisch geladen sind, erzeugen sie ein elektrisches Feld $E(x) = -\nabla\phi(x)$, wobei $\phi(x)$ das elektrostatische Potential sei. Das elektrische Feld erfüllt die Maxwell-Gleichung

$$\Delta\phi = -\operatorname{div} E = n - C(x) \text{ in } \Omega,$$

wobei $C(x)$ die Dichte der zusätzlichen geladenen Atome in Ω modelliert (Dotierungsprofil). Die Elektronenstromdichte J sei gegeben als die Summe von Diffusionsstrom (erzeugt durch die räumliche Änderung der Elektronendichte, ∇n) und Driftstrom (erzeugt durch das elektrische Feld, nE):

$$J = \nabla n + nE = \nabla n - n\nabla\phi \text{ in } \Omega.$$

Wir haben vorausgesetzt, daß durch das Bauteil kein Strom fließen soll: $J = 0$. Wegen

$$0 = J = n\nabla(\ln n - \phi)$$

und $n > 0$ in Ω impliziert dies $\ln n - \phi = \text{const.}$ in Ω . Da das Potential nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist (ϕ steht immer mit mindestens einer

Ableitung in der Gleichung), können wir die Integrationskonstante zu null wählen: $\ln n - \phi = 0$ oder $n = e^\phi$ in Ω . Damit lautet die Gleichung für ϕ :

$$\Delta\phi = e^\phi - C(x) \quad \text{in } \Omega. \quad (2.3)$$

Dies ist eine nichtlineare elliptische Differentialgleichung. Wir brauchen noch Randbedingungen für diese Gleichung. Wir nehmen an, daß $\partial\Omega$ ein total isolierender Rand ist:

$$\nabla\phi \cdot \nu = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (2.4)$$

Dies bedeutet, daß Elektronen weder in Ω hinein noch aus Ω heraus fließen.

Wir wissen von Beispiel 2.5, daß das Randwertproblem (2.3)-(2.4) nur lösbar ist, wenn

$$\int_{\Omega} (e^\phi - C) \, dx = 0 \quad (2.5)$$

gilt, und daß im Falle der Lösbarkeit unendlich viele Lösungen existieren, nämlich $\phi + \alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Bedingung (2.5) sichert aber die eindeutige Lösbarkeit. Seien nämlich $\phi + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) alle Lösungen von (2.3)-(2.4). Wähle dann $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, so daß

$$\int_{\Omega} e^{\phi(x)} \, dx = e^{-\alpha_0} \int_{\Omega} C(x) \, dx.$$

Dann erfüllt $\phi + \alpha_0$ gerade (2.5).

Um die Elektronendichte zu bestimmen, müssen wir also das Problem (2.3)-(2.4) lösen und dann $n = e^\phi$ setzen. Ist nun ϕ "sehr negativ" (d.h. $-\phi \gg 1$) in Ω , so ist n "sehr klein". Das ist plausibel, denn Elektronen fließen von "−" nach "+", fließen also in Richtung positiven Potentials.

Das Problem (2.3)-(2.4) ist im allgemeinen nicht explizit lösbar. (Eine Ausnahme ist $C(x) = \text{const.}$ in Ω ; in diesem Fall ist $\phi = \ln C$.) Wir sind also insbesondere für nichtlineare Probleme im allgemeinen auf eine numerische Lösung angewiesen.

3 Sobolev-Räume

In diesem Kapitel stellen wir einige funktionalanalytische Hilfsmittel über Sobolev-Räume bereit, die wir für die Formulierung und Approximation elliptischer Randwertprobleme benötigen. Wir werden nicht alle Resultate beweisen, da die Beweise eher in eine Vorlesung über Sobolev-Räume gehören, aber genaue Referenzen angeben, wo die Beweise zu finden sind.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) im folgenden eine offene Menge. Wir definieren zuerst die *Lebesgue-Räume*

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ meßbar: } |u|^p \text{ Lebesgue-integrierbar}\}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ L^\infty(\Omega) &= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ meßbar: } u \text{ essentiell beschränkt}\}, \quad p = \infty. \end{aligned}$$

Wir nennen eine meßbare Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *essentiell beschränkt*, wenn

$$\operatorname{ess\,sup}_\Omega |u| := \inf\{K > 0 : |u(x)| \leq K \text{ für fast alle } x \in \Omega\} < \infty.$$

Zwei Funktionen $u, v \in L^p(\Omega)$ sind gleich ($u = v$ in $L^p(\Omega)$) genau dann, wenn $u(x) = v(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Die Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$, versehen mit den Normen

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p} &:= \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty} &:= \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u|, \quad p = \infty, \end{aligned}$$

sind Banach-Räume. Der Raum $L^2(\Omega)$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{L^2} := \int_\Omega u(x)v(x) dx,$$

ist ein Hilbertraum.

Wir definieren weiter den *Träger* einer Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Der Raum

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} u \text{ kompakt}\}$$

heißt *Raum der Testfunktionen*. Er ist nichtleer; Beispiele für Testfunktionen sind

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right) & : |x| < \varepsilon \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}, \quad \varepsilon > 0.$$

Schließlich benötigen wir noch den Begriff der schwachen Ableitung.

Definition 3.1 Sei $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, und sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex. Die Funktion u besitzt die schwache Ableitung $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ genau dann, wenn für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$(D^\alpha u, v)_{L^2} = (-1)^{|\alpha|} (u, D^\alpha v)_{L^2}. \quad (3.1)$$

Es ist klar, daß für Funktionen $u \in L^p(\Omega) \cap C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$ die schwache und klassische Ableitung übereinstimmen.

Beispiel 3.2 Seien $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) = |x|$, $x \in \Omega$. Dann besitzt u die schwache Ableitung

$$u'(x) = \begin{cases} -1 & : -1 < x < 0 \\ 1 & : 0 < x < 1 \end{cases}$$

und $u' \in L^p(\Omega)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$ (Übungsaufgabe).

Die Funktion u' kann dagegen keine schwache Ableitung besitzen. Anderenfalls folgt für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u'' v \, dx &= \int_{-1}^1 u v'' \, dx \\ &= - \int_{-1}^0 x v''(x) \, dx + \int_0^1 x v''(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^0 v'(x) \, dx - \int_0^1 v'(x) \, dx \\ &= 2v(0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Wir behaupten, daß $u'' \geq 0$ in Ω gilt. Wäre nämlich $u'' < 0$ in $I \subset \Omega$ mit $\text{meas}(I) > 0$, so gäbe es ein $v \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$0 > \int_{-1}^1 u'' v \, dx = 2v(0) \geq 0;$$

Widerspruch.

Wähle nun $v_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, $v_\varepsilon \geq 0$ in Ω , so daß $v_\varepsilon(0) = 0$ und $v_\varepsilon = 1$ in I_ε mit $I_\varepsilon \rightarrow \Omega$ ($\varepsilon \rightarrow 0$). Dann folgt aus (3.2):

$$0 = 2v_\varepsilon(0) = \int_{-1}^1 u'' v_\varepsilon \, dx \geq \int_{I_\varepsilon} u'' v_\varepsilon \, dx = \int_{I_\varepsilon} u'' \, dx.$$

Der Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt

$$0 \leq \int_{-1}^1 u''(x) \, dx \leq 0,$$

also $u'' = 0$ in Ω ; Widerspruch zu (3.2).

Wir sind nun in der Lage, die Sobolev-Räume zu definieren:

Definition 3.3 Seien $m \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann heißt der Raum

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \leq m\}$$

Sobolev-Raum.

Satz 3.4 (1) Der Sobolev-Raum $W^{m,p}(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$), versehen mit der Norm

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{W^{m,\infty}} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, \quad p = \infty, \end{aligned}$$

ist ein Banachraum.

(2) Der Sobolev-Raum $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}_0$), versehen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2},$$

ist ein Hilbertraum.

Beweis: Siehe zum Beispiel [12, Kap.21.2].

Im Falle $m = 0$ setzen wir $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ und $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Funktionen aus Sobolev-Räumen müssen nicht stetig sein. Ein Beispiel ist die Funktion $u(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2)$, $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Es gilt $u \in W^{1,1}(\Omega)$, aber $u \notin C^0(\Omega)$. Für genügend "große" m und p sind Sobolev-Funktionen jedoch stetig (siehe Satz 3.11).

Was haben die Sobolev-Räume mit dem in Kapitel 1 definierten Raum zu tun? Dazu folgende Definition:

Definition 3.5 Seien $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Definiere den Sobolev-Raum

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \text{Vervollständigung von } C_0^\infty(\Omega) \text{ in } \|\cdot\|_{W^{m,p}}.$$

Dies bedeutet folgendes: Sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Dann gilt $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ genau dann, wenn es eine Folge $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ gibt mit

$$\|u_n - u\|_{W^{m,p}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Satz 3.6 Sei $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Der Raum $W_0^{m,p}(\Omega)$, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ ist ein Banachraum und $H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega)$, versehen mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{H^m}$, ist ein Hilbertraum.

Beweis: $C_0^\infty(\Omega)$ ist ein linearer Unterraum von $W^{m,p}(\Omega)$. Also ist $W_0^{m,p}(\Omega)$ ein linearer Unterraum von $W^{m,p}(\Omega)$, und die Vollständigkeit von $W_0^{m,p}(\Omega)$ folgt aus der von $W^{m,p}(\Omega)$. \square

Die Funktionen aus $W_0^{m,p}(\Omega)$ sind diejenigen Elemente aus $W^{m,p}(\Omega)$, die die Eigenschaft “ $u = 0$ auf $\partial\Omega$ ” erfüllen. Aber wie ist diese Aussage gemeint? Da Funktionen aus $W_0^{m,p}(\Omega)$ nicht stetig sein müssen (siehe die obige Bemerkung), ist $u = 0$ auf $\partial\Omega$ möglicherweise nicht definiert (denn $\partial\Omega$ ist im allgemeinen eine Nullmenge). Wir brauchen also eine Definition, die die Eigenschaft “ $u = 0$ auf $\partial\Omega$ ” in einem schwachen Sinne erklärt.

Es ist plausibel, daß für diese Definition der Rand $\partial\Omega$ “glatt” sein sollte. Um zu präzisieren, was wir unter “glatt” verstehen, definieren wir:

Definition 3.7 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein beschränktes Gebiet. Wir schreiben $\partial\Omega \in C^{0,1}$, wenn $\partial\Omega$ eine $(d-1)$ -dimensionale $C^{0,1}$ -Mannigfaltigkeit ist, so daß Ω lokal auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt. Mit anderen Worten: Es ist $\partial\Omega \in C^{0,1}$, wenn $\partial\Omega$ durch endlich viele $C^{0,1}$ -Funktionen g in der Form $x_d = g(x_1, \dots, x_{d-1})$ geschrieben werden kann, wobei $(x_1, \dots, x_d) \in \Omega$ genau dann, wenn $x_d < g(x_1, \dots, x_{d-1})$ (siehe Abbildung 3.1).

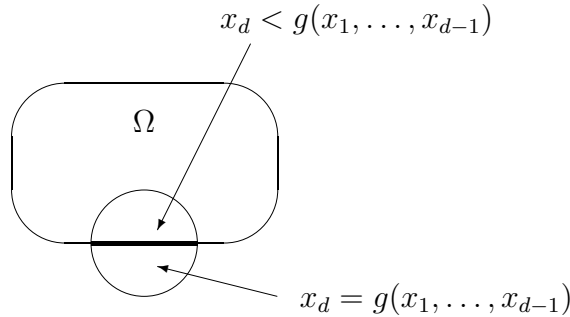


Abbildung 3.1: Gebiet Ω mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

Für $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$ und $\Omega = (0, 1)^d$ gilt $\partial\Omega \in C^{0,1}$, aber nicht für die Gebiete in Abbildung 3.2.



Abbildung 3.2: Gebiete Ω mit $\partial\Omega \notin C^{0,1}$.

Satz 3.8 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, und $1 \leq p < \infty$. Es existiert ein linearer stetiger Operator $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$, so daß für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt: $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$.

Beweis: Siehe [12, Kap.21.4].

Wir nennen $\gamma(u)$ die *verallgemeinerten Randwerte* von u . Häufig schreiben wir “ $u = 0$ auf $\partial\Omega$ ” anstatt $\gamma(u) = 0$, selbst wenn $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Insbesondere gilt (unter der Voraussetzung von Satz 3.8):

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \gamma(u) = 0\}.$$

(Für den Beweis siehe [6, Satz 6.2.42].) Der Zusammenhang mit dem in Kapitel 1 definierten Raum

$$V = \overline{X} \text{ (bzgl. } \|\cdot\|_{H^1}) = \text{Vervollständigung von } X \text{ in } \|\cdot\|_{H^1},$$

wobei $X = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$, lautet nun

$$V = H_0^1(\Omega).$$

Sei nämlich $u \in V$. Dann existiert eine Folge $(u_n) \subset X$ mit $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Insbesondere ist $u \in H^1(\Omega)$. Die Stetigkeit des Randoperators γ impliziert $0 = \gamma(u_n) \rightarrow \gamma(u)$ in $L^2(\partial\Omega)$ und damit $\gamma(u) = 0$. Daher ist $V \subset H_0^1(\Omega)$. Die Inklusion $C_0^\infty(\Omega) \subset X$ ergibt

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)} \text{ (bzgl. } \|\cdot\|_{H^1}) \subset \overline{X} \text{ (bzgl. } \|\cdot\|_{H^1}) = V.$$

Ist auch der Sobolev-Raum $W^{m,p}(\Omega)$ eine Vervollständigung von C^∞ -Funktionen, oder anders ausgedrückt: Liegen C^∞ -Funktionen dicht in $W^{m,p}(\Omega)$? Diese Frage liegt nahe, da die C_0^∞ -Funktionen (nach Definition 3.5) dicht in $W_0^{m,p}(\Omega)$ liegen. Die Antwort lautet: ja, allerdings nur unter einer Bedingung an den Rand $\partial\Omega$ (wenn Ω beschränkt) bzw. an das Verhalten der Funktionen in der Nähe von $\partial\Omega$ oder im Unendlichen (wenn Ω unbeschränkt). Genauer gilt:

Satz 3.9 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein Gebiet, $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$.

- (1) Sei Ω beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann ist $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ bzw. $W^{m,p}(\Omega) = \text{Vervollständigung von } C^\infty(\overline{\Omega}) \text{ in } \|\cdot\|_{W^{m,p}}$.
- (2) $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ ist dicht in $W^{m,p}(\Omega)$.

Beweis: Siehe [7, Kap. 6.4.3].

Kehren wir noch einmal zurück zum Sobolev-Raum $H_0^1(\Omega)$. Seine Funktionen besitzen die wichtige Eigenschaft, daß die Beschränktheit von $\|\nabla u\|_{L^2}$ bereits die Beschränktheit von $\|u\|_{L^2}$ impliziert (für beschränkte Ω). Dies hat zur Folge, daß die Normen $\|\cdot\|_{H^1}$ und $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2}$ in $H_0^1(\Omega)$ äquivalent sind. Es gilt nämlich:

Satz 3.10 (Poincaré-Ungleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann existiert eine Konstante $C_p > 0$, so daß für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{L^2} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2}. \quad (3.3)$$

Beweis: Sei zuerst $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und sei $L < 0$ so, daß $\Omega \subset (-L, L) \times \mathbb{R}^{d-1}$. Mit partieller Integration und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 u^2) \, dx - \int_{\Omega} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (u^2) \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} x_1 u^2 \, dx - 2 \int_{\Omega} x_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} \, dx \\ &= -2 \int_{\Omega} x_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} \, dx \\ &\leq 2L \|u\|_{L^2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\|u\|_{L^2} \leq 2L \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2} \leq 2L \|\nabla u\|_{L^2} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Nun sei $u \in H_0^1(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$, so daß

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^2(\Omega), \quad \nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ in } L^2(\Omega) \quad (n \rightarrow \infty)$$

und

$$\|u_n\|_{L^2} \leq 2L \|\nabla u_n\|_{L^2}.$$

Der Grenzwert $n \rightarrow \infty$ in der obigen Ungleichung liefert die Behauptung. \square

Die Ungleichung (3.3) hat die Ungleichungskette

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2)^{1/2} \leq (C_p^2 + 1)^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2} \leq (C_p^2 + 1)^{1/2} \|u\|_{H^1}$$

zur Folge, was die Äquivalenz von $\|\cdot\|_{H^1}$ und $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2}$ in $H_0^1(\Omega)$ bedeutet.

Eine andere interessante Frage ist, ob $W^{m,p}$ -Funktionen stetig sind. Im allgemeinen ist dies nicht richtig, wie wir bereits weiter oben bemerkt haben. Für genügend große m, p stimmt dies aber. Um diese Aussage präzise zu formulieren, benötigen wir den Begriff der Einbettung.

Seien X, Y Banachräume. Wir sagen, daß die Einbettung $X \hookrightarrow Y$ stetig ist, wenn $X \subset Y$ und wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\|u\|_Y \leq C \|u\|_X \quad \forall u \in X.$$

Wir sagen, daß die Einbettung $X \hookrightarrow Y$ kompakt ist, wenn sie stetig ist und wenn in X beschränkte Folgen relativ kompakt in Y sind, d.h., wenn für $(u_n) \subset X$ mit $\|u_n\|_X \leq C$ und $C > 0$ unabhängig von $n \in \mathbb{N}$ es eine Teilfolge $(u'_n) \subset (u_n)$ gibt, so daß (u'_n) in Y konvergent ist.

Satz 3.11 (Sobolev-Einbettung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $1 \leq p, q < \infty$, $m, j \in \mathbb{N}_0$, $m < j$. Dann gilt:

- (1) Wenn $m - d/p \geq j - d/q$, dann ist die Einbettung $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$ stetig.
- (2) Wenn $m - d/p > j - d/q$, dann ist die Einbettung $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$ kompakt.
- (3) Wenn $m - d/p > j$, dann ist die Einbettung $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega})$ kompakt.

Beweis: Siehe [12, Kap. 21.4].

Die Einbettung $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega})$ bedeutet, daß es einen Repräsentanten aus $W^{m,p}(\Omega)$ gibt, der im Raum $C^j(\overline{\Omega})$ liegt. Die Einbettung

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

ist in allen Raumdimensionen kompakt. Wir haben nun ein Kriterium, unter welchen Bedingungen $W^{m,p}$ -Funktionen stetig sind (bei geeigneter Wahl eines Repräsentanten). Es gilt nach Satz 3.11:

$$mp > d \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \text{ stetig.}$$

Insbesondere ist die Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ stetig, wenn $d = 1$. Für $d = 2$ gilt dies nicht mehr, wie das Beispiel $\ln|x|$ mit $x \in \mathbb{R}^2$, $|x| < 1$ zeigt. Es gilt aber $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$, wenn $d \leq 3$.

Wir benötigen noch Sobolev-Räume mit negativem Index. Betrachte etwa $u(x) = |x|$, $x \in \Omega = (-1, 1)$. Nach Beispiel 3.2 gilt $u \in H^1(\Omega)$ und $u' \in H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Die zweite Ableitung u'' existiert weder im klassischen noch im schwachen Sinne. Dennoch können wir sie als Element des Raumes $H^{-1}(\Omega)$ definieren, aber nicht mehr als Funktion, sondern als Funktional. Wir definieren:

Definition 3.12 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein Gebiet und $k \in \mathbb{N}$. Definiere den (algebraischen) Dualraum von $H_0^k(\Omega)$

$$H^{-k}(\Omega) = \{F : H_0^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : F \text{ linear und stetig}\}$$

mit der Norm

$$\|F\|_{H^{-k}} = \sup_{\|u\|_{H_0^k(\Omega)}=1} |F(u)|.$$

Wir schreiben für $F \in H^{-k}(\Omega)$ und $u \in H_0^k(\Omega)$ auch

$$\langle F, u \rangle_{H^{-k}} = F(u).$$

Satz 3.13 (1) $H^{-k}(\Omega)$, versehen mit obiger Norm, ist ein Banachraum.

(2) Die Einbettung $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-k}(\Omega)$ ist stetig im folgenden Sinne: Sei $u \in L^2(\Omega)$ und definiere $\tilde{u} \in H^{-k}(\Omega)$ durch $\langle \tilde{u}, v \rangle_{H^{-k}} := (u, v)_{L^2}$ für $v \in H_0^k(\Omega)$. Dann gilt

$$\|\tilde{u}\|_{H^{-k}} = \|u\|_{L^2}.$$

Wir identifizieren u mit \tilde{u} .

Beweis: Siehe [7, Kap. 6.4.9].

Die Sobolev-Räume gestatten, die Definition (3.1) der schwachen Ableitung zu verallgemeinern (eine befriedigende Definition liefert allerdings nur die Distributionentheorie). Sei $u \in H^{-k}(\Omega)$ und $v \in H_0^{k+|\alpha|}(\Omega)$ mit $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $k \geq 0$. Definiere dann $D^\alpha u \in H^{-k-|\alpha|}(\Omega)$ durch

$$\langle D^\alpha u, v \rangle_{H^{-k-|\alpha|}} := (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha v \rangle_{H^{-k}}.$$

Wir setzen $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^0} = (\cdot, \cdot)_{L^2}$.

Beispiel 3.14 Sei $u(x) = |x|$, $x \in \Omega = (-1, 1)$. Wir zeigen: $u'' \in H^{-1}(\Omega)$. Sei $v \in H_0^1(\Omega)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle u'', v \rangle_{H^{-1}} &= -\langle u', v' \rangle_{H^0} = -(u', v')_{L^2} \\ &= \int_{-1}^0 v'(x) dx - \int_0^1 v'(x) dx \\ &= 2v(0). \end{aligned}$$

Beachte, daß die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ im Eindimensionalen gilt und daher $v(0)$ Sinn macht. Die Stetigkeit dieser Einbettung impliziert

$$|\langle u'', v \rangle_{H^{-1}}| = 2|v(0)| \leq 2\|v\|_{L^\infty} \leq 2C\|v\|_{H^1}$$

und damit $\|u''\|_{H^{-1}} \leq 2C$.

Beispiel 3.15 Sei $u(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{-3/4}$, $(x_1, x_2) \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Dann gilt $u \notin L^2(\Omega)$. Wir behaupten, daß $u \in H^{-1}(\Omega)$. Sei dafür $v \in C_0^\infty(\Omega)$. In Polarkoordinaten haben wir $u(r, \theta) = r^{-3/2}$, $0 < r < 1$. Wir setzen $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \varepsilon\}$ und integrieren partiell

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} uv dx &= \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 r^{-3/2} v(r, \theta) r dr d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} 2\varepsilon^{1/2} v(\varepsilon, \theta) d\theta - \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 2r^{1/2} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) dr d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} 2 \cdot 1^{1/2} v(1, \theta) d\theta \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 r^{1/2} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) dr d\theta - \int_0^{2\pi} 2\varepsilon^{1/2} v(\varepsilon, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} uv \, dx \right| &\leq (8\pi(1-\varepsilon))^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 r \, dr \, d\theta \right)^{1/2} \\
 &\quad + 2\varepsilon^{1/2} \int_0^{2\pi} |v(\varepsilon, \theta)| \, d\theta \\
 &\leq (8\pi)^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2} + 2\varepsilon^{1/2} \int_0^{2\pi} |v(\varepsilon, \theta)| \, d\theta.
 \end{aligned}$$

Der Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt

$$\left| \int_{\Omega} uv \, dx \right| \leq (8\pi)^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2} \quad \text{für alle } v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ ist, gilt diese Ungleichung auch für alle $v \in H_0^1(\Omega)$. Mit Satz 3.13(2) folgt schließlich

$$|\langle u, v \rangle_{H^{-1}}| = |(u, v)_{L^2}| \leq (8\pi)^{1/2} \|v\|_{H^1},$$

also $\|u\|_{H^{-1}} \leq (8\pi)^{1/2}$.

4 Schwache Lösungen elliptischer Randwertprobleme

Wozu brauchen wir schwache Lösungen? Betrachte das Randwertproblem

$$u'' = f \quad \text{in } \Omega = (-1, 1), \quad u(-1) = u(1) = 1, \quad (4.1)$$

wobei f durch

$$\langle f, v \rangle_{H^{-1}} = 2v(0) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

gegeben ist. In Beispiel 3.14 haben wir gezeigt, daß $f \in H^{-1}(\Omega)$ gilt und daß $u(x) = |x|$, $x \in \Omega$, eine Lösung von (4.1) ist. Diese Lösung ist weder im klassischen noch im schwachen Sinn zweimal differenzierbar, es gilt aber $u \in H^1(\Omega)$. Wir benötigen eine Formulierung von (4.1), in der nur erste Ableitungen von u auftreten. Diese Formulierung nennen wir eine *schwache Formulierung*, und die entsprechenden Lösungen *schwache Lösungen*.

Wir leiten eine solche Formulierung exemplarisch für das Randwertproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (4.2)$$

her. (Allgemeinere Probleme werden weiter unten untersucht.) Hier und im folgenden sei stets $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ (damit wir den Divergenzatz anwenden können). Sei $f \in L^2(\Omega)$ und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eine klassische Lösung von (4.2). Wir multiplizieren (4.2) mit einer Funktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$, integrieren über Ω und verwenden den Divergenzatz:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v \, dx &= - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \nu) v \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt wegen der Dichtheit von $C_0^\infty(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$ auch für alle $v \in H_0^1(\Omega)$. Definiere die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

und das lineare Funktional

$$F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Die *schwache Formulierung* von (4.2) lautet

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.3)$$

Eine Funktion u heißt *schwache Lösung* von (4.2), wenn $u \in H_0^1(\Omega)$ und wenn u die Gleichung (4.3) erfüllt.

Wir haben gezeigt, daß jede klassische Lösung von (4.2) eine schwache Lösung ist. Sei umgekehrt u eine schwache Lösung von (4.2) mit der Eigenschaft $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$: Wir behaupten, daß dann u eine klassische Lösung von (4.2) ist. Es folgt nämlich für alle $v \in C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} (f + \Delta u)v \, dx = \int_{\Omega} (fv - \nabla u \cdot \nabla v) \, dx = 0.$$

Aus Dichtheitsgründen folgt für alle $v \in L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (f + \Delta u)v \, dx = 0.$$

Dies impliziert (Übungsaufgabe)

$$f + \Delta u = 0 \quad \text{fast überall in } \Omega.$$

Da $u \in H_0^1(\Omega)$, gilt $0 = \gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$.

Beachte, daß die Randbedingung für u in der Definition des Sobolev-Raumes enthalten ist: Haben wir eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (4.2) gefunden, so gilt automatisch $u = 0$ auf $\partial\Omega$ (im schwachen Sinne). Unter welchen Bedingungen an a und F erhalten wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von (4.3)? Eine Antwort gibt das Lemma von Lax-Milgram. Dafür benötigen wir die folgende Definition:

Definition 4.1 Sei V ein reeller Hilbertraum und $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform.

(1) a heißt stetig auf V , wenn es ein $K > 0$ gibt, so daß für alle $u, v \in V$ gilt:

$$|a(u, v)| \leq K \|u\|_V \|v\|_V.$$

(2) a heißt koerziv (oder elliptisch) auf V , wenn es ein $\lambda > 0$ gibt, so daß für alle $u \in V$ gilt:

$$a(u, u) \geq \lambda \|u\|_V^2.$$

Lemma 4.2 (Lax-Milgram)

Sei V ein reeller Hilbertraum, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und koerzive Bilinearform und $F \in V'$ (wobei V' den Dualraum von V bezeichne). Dann existiert genau ein $u \in V$, so daß

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V. \tag{4.4}$$

Für diese Lösung gilt

$$\|u\|_V \leq \lambda^{-1} \|F\|_{V'}.$$

Für den Beweis des Lemmas von Lax-Milgram benötigen wir den *Darstellungssatz von Riesz*:

Satz 4.3 Sei V ein Hilbertraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) und $F \in V'$. Dann existiert genau ein $u \in V$ mit

$$(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

und $\|u\|_V = \|F\|_{V'}$.

Für den Beweis des Darstellungssatzes von Riesz siehe zum Beispiel [12].

Beweis von Lemma 4.2: Sei $w \in V$. Dann ist $a(w, \cdot) \in V'$, und nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert ein eindeutig bestimmtes $T(w) \in V$ mit

$$(T(w), v) = a(w, v) \quad \forall v \in V \tag{4.5}$$

und

$$\|T(w)\|_V = \|a(w, \cdot)\|_{V'} \leq K\|w\|_V. \tag{4.6}$$

Die Abschätzung zeigt, daß der Operator $T : V \rightarrow V$ stetig ist. Wegen der Bilinearität von $a(\cdot, \cdot)$ ist T auch linear. Unser Ziel ist es zu zeigen, daß T^{-1} existiert und linear und stetig ist. Sei nämlich $g \in V$ die eindeutig bestimmte Lösung von

$$(g, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

mit $\|g\|_V = \|F\|_{V'}$ (existiert nach dem Darstellungssatz von Riesz). Mit (4.5) folgt dann

$$a(T^{-1}(g), v) = (g, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

d.h., $u := T^{-1}(g)$ ist die gesuchte Lösung. Sie ist eindeutig, da zwei Lösungen $u_1, u_2 \in V$ die Gleichung $a(u_1 - u_2, v) = 0$ für alle $v \in V$ impliziert und damit für $v = u_1 - u_2$

$$\lambda\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0,$$

also $u_1 = u_2$.

T ist injektiv: Wegen der Koerzivität von a erhalten wir für alle $u \in V$:

$$\lambda\|u\|_V^2 \leq a(u, u) = (T(u), u) \leq \|T(u)\|_V \|u\|_V,$$

also

$$\lambda\|u\|_V \leq \|T(u)\|_V. \tag{4.7}$$

Dies zeigt, daß T injektiv und $T^{-1} : T(V) \rightarrow V$ stetig ist mit

$$\|T^{-1}(v)\|_V \leq \lambda^{-1}\|v\|_V \quad \forall v \in T(V).$$

Wir müssen zeigen, daß $T(V) = V$ ist.

$T(V)$ ist abgeschlossen: Sei $(v_n) \subset T(V)$ mit $v_n \rightarrow v$ ($n \rightarrow \infty$) und $v \in V$. Wir müssen zeigen, daß $v \in T(V)$. Nach Definition der v_n existiert eine Folge $(u_n) \subset V$ mit $v_n = T(u_n) \rightarrow v$. Aus (4.7) folgt, daß (u_n) eine Cauchy-Folge in V ist und da V vollständig, erhalten wir $u_n \rightarrow w$ für ein $w \in V$. Die Stetigkeit von T impliziert $T(u_n) \rightarrow T(w)$; also $T(w) = v$ und daher $v \in T(V)$.

Es gilt $T(V) = V$: Annahme, es gelte $T(V) \neq V$. Da $T(V)$ ein abgeschlossener linearer Unterraum von V ist, können wir den Raum V orthogonal zerlegen, d.h. $V = T(V) \oplus T(V)^\perp$ mit $T(V)^\perp \neq \{0\}$. Sei nun $z \in T(V)^\perp$, $z \neq 0$, d.h. $(T(v), z) = 0$ für alle $v \in V$. Insbesondere folgt aus (4.5)

$$0 = (T(z), z) = a(z, z) \geq \lambda \|z\|_V^2$$

und damit $z = 0$. Dies widerspricht unserer Wahl $z \neq 0$.

Die Ungleichung (4.7) impliziert

$$\|u\|_V = \|T^{-1}(g)\|_V \leq \lambda^{-1} \|g\|_V = \lambda^{-1} \|F\|_{V'}.$$

Das Lemma ist vollständig bewiesen. □

Wir sind nun in der Lage, die Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen elliptischer Randwertprobleme zu beweisen. Wir untersuchen Randwertprobleme mit

- Dirichlet-Randbedingungen,
- Neumann-Randbedingungen und
- gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen.

Im folgenden setzen wir voraus:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (d \geq 1) \text{ ist ein beschränktes Gebiet mit } \partial\Omega \in C^{0,1}. \quad (4.8)$$

Dirichlet-Randwertprobleme: Wir suchen eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (4.9)$$

mit dem Differentialoperator

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x)u. \quad (4.10)$$

Definition 4.4 Der Differentialoperator L in (4.10) heißt gleichmäßig elliptisch in Ω genau dann, wenn es ein $\lambda > 0$ gibt, so daß für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ und fast alle $x \in \Omega$ gilt:

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2.$$

Die Elliptizität von L wird die Koerzivität der entsprechenden Bilinearform liefern (siehe unten). Wir benötigen die folgenden Voraussetzungen :

$$\left. \begin{array}{l} a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega), \quad c \geq 0 \text{ in } \Omega; \quad f \in L^2(\Omega), \quad g \in H^1(\Omega); \\ L \text{ ist gleichmäßig elliptisch in } \Omega. \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

Die schwache Formulierung von (4.9) erhalten wir durch eine ähnliche Rechnung wie in dem Beispiel weiter oben durch Integration und Anwendung des Divergenz-satzes. Sei

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} c u v dx, \\ F(v) &= \int_{\Omega} f v dx. \end{aligned}$$

Wir könnten nun u als Lösung des Problems $a(u, v) = F(v)$ für $v \in H_0^1(\Omega)$ suchen; allerdings ist im allgemeinen $u \notin H_0^1(\Omega)$, da $u = g$ auf $\partial\Omega$. Eine Möglichkeit ist, eine Funktion u mit $u - g \in H_0^1(\Omega)$ zu suchen. Wir transformieren das Problem auf homogene Randbedingungen. Sei $w (= u - g) \in H_0^1(\Omega)$ eine Lösung von

$$Lw = f - Lg \text{ in } \Omega, \quad w = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \quad (4.12)$$

Dies legt nahe, die rechte Seite folgendermaßen zu definieren:

$$G(v) = F(v) - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} c g v dx, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Die schwache Formulierung von (4.12) lautet dann: Finde $w \in H_0^1(\Omega)$, so daß

$$a(w, v) = G(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Dann ist $u = w + g$ die gesuchte *schwache Lösung* von (4.9).

Wir haben für die Randwertdaten $g \in H^1(\Omega)$ vorausgesetzt. Eigentlich benötigen wir die Werte von g nur auf dem Rand $\partial\Omega$, es sollte also genügen, lediglich $g \in L^2(\partial\Omega)$ zu fordern. Andererseits haben wir gesehen, daß die Transformation auf homogene Randbedingungen die Definition von g in Ω erfordert und daß $g \in H^1(\Omega)$ notwendig scheint. Kann man Funktionen $g \in L^2(\partial\Omega)$ so fortsetzen, daß die Fortsetzung $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ und $\tilde{g} = g$ auf $\partial\Omega$ erfüllt? Im allgemeinen stimmt dies nicht. Erfüllen aber g und $\partial\Omega$ gewisse Regularitätseigenschaften, dann geht das. (Genauer gesagt benötigt man $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$; siehe zum Beispiel [6, Kap. 6.2.40].) Um technische Komplikationen zu vermeiden, kann man $g \in \gamma(H^1(\Omega))$ fordern (dann existiert ein $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ mit $\gamma(\tilde{g}) = g$) oder gleich $g \in H^1(\Omega)$ (und interpretiert $u = g$ auf $\partial\Omega$ im Sinne von $\gamma(u - g) = 0$).

Satz 4.5 *Unter den Voraussetzungen (4.8) und (4.11) existiert genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von (4.9) mit $u - g \in H_0^1(\Omega)$ und*

$$\|u\|_{H^1} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^1}), \quad (4.13)$$

wobei $C > 0$ von λ , Ω , a_{ij} und c abhängt.

Die Abschätzung (4.13) beweist die stetige Abhängigkeit der Lösung u von den Daten f und g .

Beweis: Wir wollen das Lemma von Lax-Milgram in $V = H_0^1(\Omega)$ anwenden. Dafür prüfen wir die entsprechenden Voraussetzungen nach:

(1) a ist stetig: Für alle $u, v \in V$ gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} |a_{ij}| \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx + \int_{\Omega} |c| |u| |v| dx \\ &\leq \max_{i,j=1,\dots,d} \{ \|a_{ij}\|_{L^\infty}, \|c\|_{L^\infty} \} \left(\sum_{i,j=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \right) \\ &= K (\|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}) \\ &\leq K \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}, \end{aligned}$$

wobei $K = \max\{\|a_{ij}\|_{L^\infty}, \|c\|_{L^\infty} : i, j = 1, \dots, d\}$.

(2) a ist koerziv: Sei $u \in H_0^1(\Omega)$. Die gleichmäßige Elliptizität von L und die Nichtnegativität von c implizieren

$$a(u, u) \geq \lambda \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx = \lambda \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \lambda_0 \|u\|_{H^1}^2,$$

wobei $\lambda_0 = \lambda/(C_p^2 + 1)$ und $C_p > 0$ ist die Konstante in der Poincaré-Ungleichung (siehe Satz 3.10). Beachte nämlich, daß für $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (1 + C_p^2) \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

gilt.

(3) $G \in V' = H^{-1}(\Omega)$: Sei $v \in V$. Dann gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} |G(v)| &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \max_{i,j=1,\dots,d} \|a_{ij}\|_{L^\infty} \|\nabla g\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\ &\quad + \|c\|_{L^\infty} \|g\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq (\|f\|_{L^2} + C_1 \|g\|_{H^1}) \|v\|_{H^1}, \end{aligned}$$

wobei $C_1 = \max\{\|a_{ij}\|_{L^\infty} : i, j = 1, \dots, d\} + \|c\|_{L^\infty}$. Daher ist $\|G\|_{H^{-1}} \leq \|f\|_{L^2} + C_1 \|g\|_{H^1}$. Wir bemerken, daß wir wegen $G \in H^{-1}(\Omega)$ auch

$$\langle G, v \rangle_{H^{-1}} = \langle f - Lg, v \rangle_{H^{-1}}$$

für $v \in H_0^1(\Omega)$ schreiben können.

Nach Lemma 4.2 existiert genau ein $w \in V$, so daß

$$a(w, v) = G(v) \quad \forall v \in V$$

gilt und außerdem für $u = w + g$

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1} &\leq \|w\|_{H^1} + \|g\|_{H^1} \\ &\leq \lambda_0^{-1} \|G\|_{V'} + \|g\|_{H^1} \\ &\leq \lambda^{-1} (C_p^2 + 1) (\|f\|_{L^2} + C_1 \|g\|_{H^1}) + \|g\|_{H^1} \\ &\leq C (\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^1}), \end{aligned}$$

wobei $C = 1 + \lambda^{-1} (C_p^2 + 1) (C_1 + 1)$. Dies beweist die Abschätzung (4.13). \square

Neumann-Randwertprobleme: Wir betrachten exemplarisch das Problem

$$-\Delta u + c(x)u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \nabla u \cdot \nu = g \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (4.14)$$

mit

$$c \in L^\infty(\Omega), \quad c \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad f \in L^2(\Omega), \quad g \in H^1(\Omega). \quad (4.15)$$

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ eine klassische Lösung von (4.14) und $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Multiplikation von (4.14) mit v , Integration über Ω und partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v \, dx &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + c u v) \, dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \nu) v \, ds \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + c u v) \, dx - \int_{\partial\Omega} g v \, ds. \end{aligned}$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + c u v) \, dx, \\ F(v) &= \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, ds, \quad u, v \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

lautet die schwache Formulierung von (4.14) wie folgt: Finde $u \in V = H^1(\Omega)$, so daß

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V. \quad (4.16)$$

Das Randintegral in der Definition von F ist übrigens in dem Sinne

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(g) \gamma(v) \, ds$$

zu verstehen.

Wir diskutieren zuerst den Fall $c \equiv 0$. In Beispiel 2.5 haben wir bereits gesehen, daß Neumann-Randwertprobleme dann nur unter der Zusatzbedingung

$$F(1) = \int_{\Omega} f \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, ds = 0$$

lösbar sind und mit jeder Lösung u auch $u+c$ ($c \in \mathbb{R}$) eine Lösung ist. Wir rechnen also damit, daß ein Existenz- und Eindeutigkeitsresultat zusätzliche Annahmen erfordert.

Es böte sich wegen (4.16) an, das Lemma von Lax-Milgram für $V = H^1(\Omega)$ anzuwenden. Im Falle $c \equiv 0$ ist jedoch die Bilinearform nicht koerziv, denn $a(u, u) = 0$ für alle konstanten Funktionen u . Ein Ausweg ist, in einem anderen Hilbertraum zu arbeiten, etwa

$$V = \{u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u \, dx = 0\}. \quad (4.17)$$

Die Zusatzbedingung schließt konstante Funktionen aus. Außerdem sichert diese Bedingung die Eindeutigkeit von Lösungen.

Im Falle $\inf_{\Omega} c > 0$ haben wir diese Probleme nicht, denn dann gilt

$$a(u, u) \geq \min(1, \inf_{\Omega} c) \|u\|_{H^1}^2,$$

d.h., a ist koerziv, und das Lemma von Lax-Milgram kann in $V = H^1(\Omega)$ angewendet werden. Genauer gilt:

Satz 4.6 *Setze (4.8) und (4.15) voraus.*

- (1) *Sei $\inf_{\Omega} c > 0$. Dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in V = H^1(\Omega)$ von (4.14), d.h., u erfüllt (4.16).*
- (2) *Sei $\inf_{\Omega} c = 0$. Es gelte $F(1) = 0$. Dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in V = \{u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u \, dx = 0\}$ von (4.14).*

In beiden Fällen existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von Ω und $\inf_{\Omega} c$ abhängt, so daß

$$\|u\|_{H^1} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^1}).$$

Beweis: Wir zeigen zuerst (1). Eine ähnliche Rechnung wie im Beweis von Satz 4.5 zeigt, daß a stetig in $V = H^1(\Omega)$ ist. Die Bilinearform ist auch koerziv, denn für $u \in V$ gilt

$$a(u, u) \geq \lambda \|u\|_V^2 \quad \text{mit } \lambda = \min(1, \inf_{\Omega} c).$$

Aus der Stetigkeit des Randoperators folgt für $v \in V$:

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma(g)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + C_{\gamma} \|g\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq (\|f\|_{L^2} + C_{\gamma} \|g\|_{H^1}) \|v\|_{H^1}, \end{aligned}$$

d.h. $F \in V'$. Das Lemma 4.2 von Lax-Milgram sichert nun die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung $u \in V$ von (4.14). Außerdem gilt

$$\|u\|_{H^1} \leq \lambda^{-1} \|F\|_{V'} \leq \lambda^{-1} \max(1, C_\gamma) (\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^1}).$$

Für den Beweis von (2) betrachten wir den in (4.17) definierten Raum mit dem Skalarprodukt $(u, v)_V := (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$ für $u, v \in V$. Die Norm von V lautet damit $\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^2}$. Dann ist a koerziv, denn

$$a(u, u) \geq \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|u\|_V^2.$$

Doch ist V überhaupt ein Hilbertraum? Wir zeigen weiter unten, daß die Antwort ja lautet und daß außerdem die Norm von V äquivalent zu der Norm $\|\cdot\|_{H^1}$ ist. Dann folgt nämlich die Stetigkeit von a und F : Seien $u, v \in V$. Es folgt

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq \|u\|_V \|v\|_V + \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ &\leq \|u\|_V \|v\|_V + C_V^2 \|c\|_{L^\infty} \|u\|_V \|v\|_V \\ &= (1 + C_V^2 \|c\|_{L^\infty}) \|u\|_V \|v\|_V \end{aligned}$$

und (siehe oben)

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq (\|f\|_{L^2} + C_\gamma \|g\|_{H^1}) \|v\|_{H^1} \\ &\leq C_V (\|f\|_{L^2} + C_\gamma \|g\|_{H^1}) \|v\|_V. \end{aligned}$$

Das Lemma von Lax-Milgram liefert nun die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung $u \in V$ von (4.14), und es gilt wegen $\lambda = 1$

$$\|u\|_{H^1} \leq \lambda^{-1} \|F\|_{V'} \leq C_V \max(1, C_\gamma) (\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^1}).$$

Wir müssen die Vollständigkeit des in (4.17) definierten Raumes V nachweisen. Dafür benötigen wir den folgenden Satz, der eine Verallgemeinerung der Ungleichung von Poincaré ist.

Satz 4.7 (Bramble-Hilbert)

Es gelte (4.8) und seien $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Seien ferner μ_1, \dots, μ_k stetige Halbnormen in $W^{m,p}(\Omega)$ mit der Eigenschaft, daß $\mu_i(p) = 0$ für alle Polynome p der Ordnung höchstens $m - 1$ und für alle $i = 1, \dots, k$ impliziert: $p = 0$. Dann ist die Norm

$$\|u\|_\mu = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^k \mu_i(u)^p \right)^{1/p}$$

äquivalent zu der Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$.

Eine *Halbnorm* μ ist wie eine Norm definiert mit der Ausnahme, daß die Eigenschaft $\mu(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ nicht gefordert wird.

Wir werden den Satz 4.7 für $m = 1$, $p = 2$, $k = 1$ und $\mu_1(u) = |(u, 1)_{L^2}|$ anwenden. Dann ist für alle $u \in V$ die Norm

$$\|u\|_\mu = \|\nabla u\|_{L^2} = \|u\|_V \quad (4.18)$$

äquivalent zu der Norm $\|\cdot\|_{H^1}$, und insbesondere gilt: $\|u\|_{H^1} \leq C_V \|u\|_V$.

Ende des Beweises von Satz 4.6(2): Wir zeigen, daß der in Satz 4.6(2) definierte Raum vollständig ist. Sei (u_n) eine Cauchyfolge in V , d.h. bezüglich der Norm von V (siehe (4.18)). Wegen der Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_{H^1}$ ist $(u_n) \subset V \subset H^1(\Omega)$ auch eine Cauchyfolge bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^1}$. Da $H^1(\Omega)$ vollständig ist, existiert ein $u \in H^1(\Omega)$, so daß $u_n \rightarrow u$ in $H^1(\Omega)$ ($n \rightarrow \infty$). Wir müssen $u \in V$ zeigen. Die Äquivalenz der Normen impliziert

$$\|\nabla(u_n - u)\|_{L^2}^2 + |(u_n - u, 1)|_{L^2}^2 = \|u_n - u\|_\mu^2 \leq C \|u_n - u\|_{H^1}^2 \rightarrow 0,$$

also

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u \, dx \right| &\leq \left| \int_\Omega u_n \, dx \right| + \left| \int_\Omega (u_n - u) \, dx \right| \\ &= \left| \int_\Omega (u_n - u) \, dx \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

d.h. $u \in V$. Damit ist Satz 4.6 vollständig bewiesen. \square

Beweis von Satz 4.7: Wir zeigen zuerst, daß $\|\cdot\|_\mu$ tatsächlich eine Norm auf $W^{m,p}(\Omega)$ ist. Wir müssen wegen der Halbnormeigenschaften von μ_i nur nachweisen, daß $\|u\|_\mu = 0$ auch $u = 0$ impliziert. Aus $\|u\|_\mu = 0$ folgt

$$\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p} = 0 \quad \text{und} \quad \mu_i(u) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, k.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, daß u ein Polynom höchstens der Ordnung $m - 1$ ist. Aus der zweiten Gleichung folgt dann nach Voraussetzung $u = 0$.

Wegen der Stetigkeit der Halbnormen μ_i auf $W^{m,p}(\Omega)$ erhalten wir

$$\mu_i(u) \leq C_i \|u\|_{W^{m,p}} \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega), \quad i = 1, \dots, k,$$

mit positiven Konstanten C_i . Daher ist

$$\begin{aligned} \|u\|_\mu &\leq \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^k C_i^p \|u\|_{W^{m,p}}^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(1 + \sum_{i=1}^k C_i^p \right)^{1/p} \|u\|_{W^{m,p}}. \end{aligned}$$

Die umgekehrte Ungleichung beweisen wir indirekt. Wir wollen zeigen:

$$\exists C > 0 : \forall u \in W^{m,p}(\Omega) : \|u\|_{W^{m,p}} \leq C \|u\|_{\mu}.$$

Wir nehmen an, daß das Gegenteil gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists (u_n) \subset W^{m,p}(\Omega) : \|u_n\|_{W^{m,p}} = 1 \text{ und } \|u_n\|_{\mu} < \frac{1}{n}.$$

Die letzte Bedingung impliziert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^{\alpha} u_n\|_{L^p} = 0 \quad \forall |\alpha| = m \quad (4.19)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_i(u_n) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k. \quad (4.20)$$

Da die Einbettung $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m-1,p}(\Omega)$ kompakt ist (siehe Satz 3.11(2)) und die Folge (u_n) in $W^{m,p}(\Omega)$ beschränkt, existiert eine Teilfolge von (u_n) , die in $W^{m-1,p}(\Omega)$ konvergiert. Sei u der Grenzwert und sei die Teilfolge wieder mit (u_n) bezeichnet. Dann gilt für $|\alpha| = m$ und $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \langle D^{\alpha} u, v \rangle_{H^{-|\alpha|}} &= (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^{\alpha} v \rangle_{H^0} \\ &= (-1)^{|\alpha|} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, D^{\alpha} v \rangle_{L^2} \right) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, D^{\alpha} v \rangle_{L^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle D^{\alpha} u_n, v \rangle_{L^2} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} D^{\alpha} u_n, v \right)_{L^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn $\lim_{n \rightarrow \infty} D^{\alpha} u_n = 0$ nach (4.19) (gemeint ist der Limes in $L^p(\Omega)$). Wir haben außerdem oben den Satz von Lebesgue verwendet. Es folgt

$$D^{\alpha} u = 0 \quad \forall |\alpha| = m,$$

d.h., u ist ein Polynom höchstens der Ordnung $m - 1$. Außerdem folgt

$$\|u_n - u\|_{W^{m,p}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Wegen (4.20) und der Stetigkeit der Halbnormen impliziert dies $\mu_i(u) = 0$ für alle $i = 1, \dots, k$. Nach Voraussetzung ist dann $u = 0$. Dies widerspricht jedoch

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{W^{m,p}} = 1.$$

Der Satz ist bewiesen. □

Gemischte Dirichlet-Neumann-Randwertprobleme: In Beispiel 1.1 haben wir gesehen, daß es physikalische Fragestellungen gibt, bei denen auf Teilen des Randes $\partial\Omega$ Dirichlet-Daten und auf den restlichen Teilen von $\partial\Omega$ Neumann-Daten vorgeschrieben sind. Solche Probleme heißen gemischte Dirichlet-Randwertprobleme. Zur Illustration betrachten wir das folgende Problem:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D, \quad \nabla u \cdot \nu = 0 \quad \text{auf } \Gamma_N. \quad (4.21)$$

Dabei setzen wir voraus, daß

$$\left. \begin{array}{l} \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset, \quad \text{meas}(\Gamma_D) > 0, \\ \Gamma_N \text{ ist offen bezüglich } \partial\Omega. \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

Wenn $\text{meas}(\Gamma_N) > 0$, können wir als Lösungsraum nicht den Raum $H_0^1(\Omega)$ verwenden, da die Lösung ja nur auf einem Teil des Randes verschwindet. Wir benötigen einen anderen Funktionenraum, nämlich

$$H_0^1(\Omega \cup \Gamma_N) = \text{Vervollständigung von } C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_N) \text{ in } \|\cdot\|_{H^1}.$$

Hierbei ist

$$C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_N) = \{u \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \text{supp } u \subset \Omega \cup \Gamma_N\}$$

der Raum aller C^∞ -Funktionen, die in einer Umgebung von Γ_D verschwinden, d.h., sie erfüllen $u = 0$ auf Γ_D (siehe Abbildung 4.1). Der Raum $H_0^1(\Omega \cup \Gamma_N)$ ist ein Banachraum mit der Norm $\|\cdot\|_{H^1}$. Man kann unter der Voraussetzung (4.8)

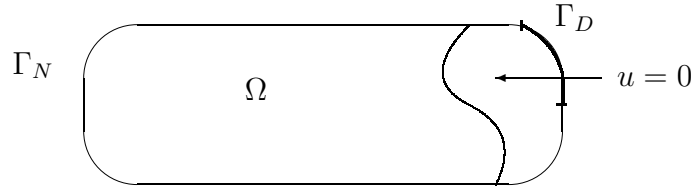


Abbildung 4.1: Beispiel einer Funktion $u \in C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_N)$.

zeigen, daß es einen linearen stetigen Operator $\gamma_D : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_D)$ gibt, so daß $\gamma_D(u) = u|_{\Gamma_D}$ für alle $u \in C^1(\bar{\Omega})$. In diesem Sinne ist

$$H_0^1(\Omega \cup \Gamma_N) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_D(u) = 0\}.$$

Ist nun $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ eine klassische Lösung von (4.21), so folgt für $v \in C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_N)$:

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \nu) v \, ds = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

da $\nabla u \cdot \nu = 0$ auf Γ_N und $v = 0$ auf Γ_D . Wir suchen eine schwache Lösung $u \in V := H_0^1(\Omega \cup \Gamma_N)$, die die Beziehung

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V$$

erfüllt.

Satz 4.8 *Es gelten (4.8) und (4.22). Ferner sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in V$ von (4.21), und es gilt*

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|f\|_{L^2},$$

wobei $C > 0$ nur von Ω abhängt.

Beweisskizze: Zeige zuerst, daß die folgende Verallgemeinerung der Poincaré-Ungleichung gilt: Setze (4.8) und (4.22) voraus. Dann existiert ein $C_p > 0$, so daß für alle $u \in V$

$$\|u\|_{L^2} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2}.$$

(Siehe [10] für einen Beweis.) Mit Hilfe dieser Ungleichung kann man zeigen, daß die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

stetig und koerziv auf V ist. Das Lemma von Lax-Milgram liefert nun die gewünschte Lösung. \square

Zum Abschluß dieses Kapitels präsentieren wir zwei Resultate über die Regularität schwacher Lösungen des elliptischen Problems

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (4.23)$$

wobei L wie in (4.10) definiert ist. Die Idee ist, daß u umso “glatter” (oder regulärer) ist, je “glatter” $\partial\Omega$, f , und g sind. Genauer gilt:

Satz 4.9 (Innere Regularität)

Es gelte (4.11) und zusätzlich seien $a_{ij} \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ und $f \in H^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Sei ferner $\omega \subset \Omega$ mit $\overline{\omega} \subset \Omega$. Dann gilt für die schwache Lösung u von (4.23): $u \in H^{k+2}(\omega)$, und es existiert eine Konstante $C > 0$ (die von ω abhängt), so daß

$$\|u\|_{H^{k+2}(\omega)} \leq C(\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}).$$

Dies bedeutet, daß $\partial\Omega$ und g keinen Einfluß auf die Regularität von u im Inneren von Ω haben.

Satz 4.10 (Regularität bis zum Rand)

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 4.9 und zusätzlich seien $\partial\Omega \in C^{k+2}$ (Definition analog zu Definition 3.7) und $g \in H^{k+2}(\Omega)$. Dann erfüllt die schwache Lösung u von (4.23) die Regularitätseigenschaft $u \in H^{k+2}(\Omega)$, und es existiert eine Konstante $C > 0$ (die von Ω abhängt), so daß

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|g\|_{H^{k+2}(\Omega)}).$$

Dieser Satz drückt die Glättungseigenschaft elliptischer Operatoren aus: Die Lösung ist um zwei Differentiationsordnungen glatter als die rechte Seite der Gleichung. Die Beweise von Satz 4.9 und Satz 4.10 sind umfangreich (siehe [10] oder [6, Kap. 9]).

Ähnliche Resultate wie Satz 4.10 gelten für Neumann-Randwertprobleme, nicht jedoch für gemischte Dirichlet-Neumann-Randwertprobleme. Im letzten Fall können wir im allgemeinen höchstens $u \in W^{2,4/3-\varepsilon}(\Omega)$ für alle $\varepsilon > 0$ erwarten, selbst bei glatten Daten.

Der Satz 4.10 beantwortet die Frage, unter welchen Bedingungen *klassische* Lösungen von (4.23) existieren. Sei nämlich $k \in \mathbb{N}$ mit $k > d/2$. Unter den Voraussetzungen von Satz 4.10 folgt für die schwache Lösung u von (4.23): $u \in H^{k+2}(\Omega)$. Die stetige Einbettung $H^{k+2}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$ impliziert dann $u \in C^2(\overline{\Omega})$, d.h., u ist die klassische Lösung von (4.23).

Wir bemerken, daß die Regularitätsvoraussetzung an $\partial\Omega$ in Satz 4.10 nicht erforderlich ist, wenn Ω *konvex* ist, d.h. wenn für alle $x, y \in \Omega$, $\lambda \in [0, 1]$ auch $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \Omega$ ist. Genauer gilt: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein beschränktes und konvexes Gebiet und seien

$$a_{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega}), \quad c \in L^\infty(\Omega), \quad f \in H^k(\Omega) \quad \text{und} \quad g \in H^{k+2}(\Omega).$$

Dann gelten die Folgerungen von Satz 4.10. (Für den Beweis siehe [6, Kap. 9.1.5].)

5 Die Ritz-Galerkin-Methode

Seien V ein (reeller) Hilbertraum, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform und $F \in V'$. In diesem Kapitel möchten wir das abstrakte Problem

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \quad (5.1)$$

approximativ lösen. Die Idee ist, den (im allgemeinen unendlichdimensionalen) Raum V durch endlichdimensionale Unterräume $V_h \subset V$ ($h > 0$) zu ersetzen. Die *Ritz-Galerkin-Approximation* $u_h \in V_h$ ist definiert als Lösung des diskreten Problems

$$a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h. \quad (5.2)$$

Dies ist ein endlichdimensionales Problem, das wir folgendermaßen lösen können. Sei $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ eine Basis von V_h . Dann ist (5.2) äquivalent zu

$$a(u_h, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Mit

$$u_h = \sum_{j=1}^N v_j \phi_j$$

erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^N a(\phi_j, \phi_i) v_j = F(\phi_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

in den N Unbekannten v_1, \dots, v_N . Definiere $A = (A_{ij}) = (a(\phi_j, \phi_i))$, $b = (b_i) = (F(\phi_i))$ und $v = (v_i)$. Das Gleichungssystem lautet in Matrixform:

$$Av = b. \quad (5.3)$$

Die Matrix A nennt man *Steifigkeitsmatrix*, den Vektor b *Ladevektor*. (Die Begriffe rühren von Anwendungen in der linearen Elastizitätstheorie her.)

Wenn a koerziv auf V ist, dann auch auf V_h . Insbesondere ist das Gleichungssystem (5.3) eindeutig lösbar. Es gilt nämlich für alle $\xi \in \mathbb{R}^N$ und $z = \sum_i \xi_i \phi_i$:

$$\xi^T A \xi = \sum_{i,j=1}^N a(\phi_j, \phi_i) \xi_i \xi_j = a(z, z) \geq \lambda \|z\|_V^2.$$

Wenn $A\xi = 0$, dann folgt also $z = 0$ und damit $\xi = 0$. Dies bedeutet: A ist injektiv, also invertierbar. Wir haben bewiesen:

Lemma 5.1 *Sei a koerziv auf V . Dann ist das diskrete Problem (5.2) eindeutig lösbar in V_h .*

Wie gut approximiert u_h die Lösung u ? Eine Antwort gibt das folgende Lemma.

Lemma 5.2 (Céa)

Seien V ein Hilbertraum, a eine stetige, koerzive Bilinearform auf V und $F \in V'$. Seien ferner $V_h \subset V$ ein Unterraum, $u \in V$ die Lösung von (5.1) und $u_h \in V_h$ die Lösung von (5.2). Dann gilt:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{K}{\lambda} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V, \quad (5.4)$$

wobei K die Stetigkeitskonstante und λ die Koerzivitatskonstante von a bedeuten (siehe Definition 4.1).

Beweis: Subtraktion von (5.1) und (5.2) ergibt für alle $v \in V_h$:

$$a(u - u_h, v) = 0. \quad (5.5)$$

Insbesondere gilt

$$a(u - u_h, v - u_h) = 0 \quad \forall v \in V_h,$$

und daher für $v \in V_h$

$$\begin{aligned} \lambda \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) + a(u - u_h, v - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) \\ &\leq K \|u - u_h\|_V \|u - v\|_V. \end{aligned}$$

Für alle $v \in V_h$ folgt

$$\|u - u_h\|_V \leq (K/\lambda) \|u - v\|_V$$

und damit die Behauptung. □

Wenn a zusätzlich *symmetrisch* ist (d.h. $a(u, v) = a(v, u)$ für $u, v \in V$), dann definiert $a(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt auf V und V_h (denn $a(u, u) = 0$ impliziert $u = 0$ wegen der Koerzivität). In diesem Fall hat das Lemma von Céa eine geometrische Interpretation. Die Beziehung (5.5) bedeutet, daß $u - u_h$ orthogonal zu V_h ist, d.h., u_h ist dasjenige Element in V_h , das u ‘‘am nahsten’’ kommt (siehe Abbildung 5.1). Dies wird gerade durch (5.4) ausgedrückt.

Um Konvergenz von u_h gegen u für $h \rightarrow 0$ zu erhalten, benötigen wir (verständlicherweise) eine Zusatzeigenschaft an die Räume V_h . Im Grenzwert $h \rightarrow 0$ sollte V_h gegen V konvergieren, und zwar im folgenden Sinne:

Korollar 5.3 *Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 5.2 und*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(u, V_h) = 0 \quad \forall u \in V.$$

Dann folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0.$$

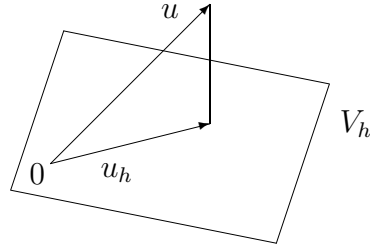


Abbildung 5.1: Die Approximation u_h kommt u in V_h am “nächsten”.

Beweis: Seien $\varepsilon > 0$ und $u \in V_h$. Dann existiert nach Voraussetzung $h_0 > 0$, so daß für alle $0 < h < h_0$ gilt:

$$\text{dist}(u, V_h) := \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V < \lambda\varepsilon/K.$$

Mit Lemma 5.2 folgt sofort $\|u - u_h\|_V < \varepsilon$. □

Im Falle symmetrischer Bilinearformen a können wir die Lösung des Problems (5.1) auch als Lösung eines Minimierungsproblems interpretieren.

Lemma 5.4 *Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 5.2, und a sei symmetrisch. Dann ist (5.1) äquivalent zu*

$$E(u) = \min_{v \in V} E(v) \tag{5.6}$$

mit $E(v) = a(v, v) - 2F(v)$, $v \in V$.

Beweis: Sei $v \in V$ und definiere die Funktion $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$e(t) := E(u + tv) = E(u) + 2t(a(u, v) - F(v)) + t^2a(v, v).$$

(Hier haben wir die Symmetrie von a benutzt).

Sei nun $u \in V$ die Lösung von (5.6). Dann nimmt die Funktion e an $t = 0$ ihr Minimum an, d.h. $e'(0) = 0$. Dies impliziert $a(u, v) = F(v)$.

Sei umgekehrt $u \in V$ Lösung von (5.1). Dann folgt

$$E(u) \leq E(u) + a(v, v) = e(1) = E(u + v).$$

Für alle $w \in V$ folgt also (mit $v = w - u$)

$$E(u) \leq E(w).$$

Also löst u (5.6). □

Damit können wir das diskrete Problem (5.2) auch so interpretieren, daß wir das Minimum von E nicht in V , sondern in einem “kleineren” Raum V_h suchen. Das Funktional E kann als die “Energie” des Systems interpretiert werden. Die Gleichung (5.1) heißt *Euler-Lagrange-Gleichung* zu E .

Wenn wir die schwache Lösung eines elliptischen Randwertproblems praktisch lösen möchten, müssen wir also die Koeffizienten $A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$ berechnen und das lineare Gleichungssystem (5.3) lösen. Es ist wünschenswert, daß

- die Berechnung von A_{ij} möglichst einfach und
- die Matrix (A_{ij}) möglichst schwachbesetzt ist.

Die beiden Forderungen werden durch die Finite-Elemente-Approximationen erfüllt. Diese Approximationen untersuchen wir im nächsten Kapitel.

6 Finite-Elemente-Räume

Finite-Elemente-Approximationen sind durch die folgenden drei Aspekte charakterisiert:

- Die Menge Ω wird in endlich viele Teilmengen zerlegt: $\bar{\Omega} = \bigcup_{\tau \in T_h} \tau$. Die Teilmengen τ sind zum Beispiel Dreiecke oder Rechtecke im \mathbb{R}^2 oder Tetraeder oder Quader im \mathbb{R}^3 .
- Die endlichdimensionalen Räume V_h enthalten Funktionen, deren Einschränkung auf $\tau \in T_h$ (im allgemeinen) Polynome sind.
- Es gibt Basisfunktionen ϕ_1, \dots, ϕ_N von V_h , die einfach zu berechnen sind und die möglichst kleine Träger haben.

Wegen $A_{ij} := a(\phi_j, \phi_i) = 0$, wenn $(\text{supp } \phi_i)^0 \cup (\text{supp } \phi_j)^0 = \emptyset$, ist die Matrix (A_{ij}) schwachbesetzt, wenn die Träger der Funktionen ϕ_i "klein" sind. Im Falle einer symmetrischen Bilinearform a gibt es theoretisch eine einfache Möglichkeit, die Bedingung, daß die Matrix (A_{ij}) schwachbesetzt sein soll, zu erfüllen. Da in diesem Fall $a(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt auf V_h ist, kann man mittels des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt eine orthonormale Basis konstruieren. Die Matrix (A_{ij}) ist dann die Einheitsmatrix. Allerdings ist die Orthonormalisierung genauso aufwendig wie die Lösung des linearen Gleichungssystems bezüglich irgendeiner Basis und daher unbrauchbar.

Wir beginnen mit der Definition eines (abstrakten) Finiten Elements.

Definition 6.1 *Ein Finites Element im \mathbb{R}^d ($d \geq 1$) ist ein Tripel $(\tau, P_\tau, \Sigma_\tau)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- (1) $\tau \subset \mathbb{R}^d$ ist abgeschlossen, $\tau^0 \neq \emptyset$ und $\partial\tau \in C^{0,1}$.
- (2) P_τ ist ein endlichdimensionaler Raum von Funktionen $\tau \rightarrow \mathbb{R}$. Wir setzen $n = \dim P_\tau$.
- (3) Σ_τ besteht aus den linear unabhängigen, stetigen linearen Funktionalen $B_1, \dots, B_n : C^s(\tau) \rightarrow \mathbb{R}$ ($s \in \mathbb{N}_0$), die unisolvant sind, d.h., für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ existiert ein $p \in P_\tau$, so daß

$$B_i(p) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Bedingung (6.1) impliziert die Existenz von n Funktionen $p_1, \dots, p_n \in P_\tau$, so daß

$$B_i(p) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

(wähle $\alpha_i = \delta_{ij}$ in (6.1)). Die Funktionale B_i heißen die *Freiheitsgrade* des Finiten Elements, und die Funktionen p_i heißen die *Basisfunktionen* des Finiten Elements.

Häufig bezeichnen wir ein Finites Element einfach mit τ . Die Bedeutung der Funktionale B_i und der Funktionen p_i wird am besten durch Beispiele klar. Dafür benötigen wir die folgende Definition.

Definition 6.2 (1) Der Raum aller Polynome $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ höchstens der Ordnung $k \geq 0$ wird mit $P_k(\Omega)$ bezeichnet.

(2) Ein d -Simplex τ im \mathbb{R}^d ist die konvexe Hülle der Punkte $a_1, \dots, a_{d+1} \in \mathbb{R}^d$, d.h.

$$\tau = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i a_i, 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_{d+1} \leq 1, \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\},$$

wobei die Punkte a_1, \dots, a_{d+1} nicht in einer Hyperebene des \mathbb{R}^d enthalten sind.

Die Punkte a_i heißen die Eckpunkte des d -Simplex. Ein 2-Simplex ist ein Dreieck und ein 3-Simplex ist ein Tetraeder (siehe Abbildung 6.1).

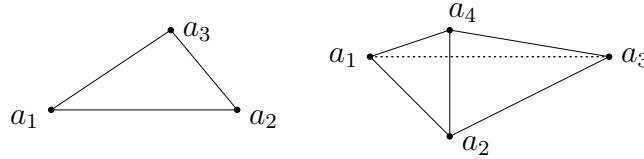


Abbildung 6.1: Lineare Finite Elemente im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 .

Beispiel 6.3 (1) *Lineare Lagrangesche Finite Elemente im \mathbb{R}^d* : Sei τ ein d -Simplex im \mathbb{R}^d mit Eckpunkten a_1, \dots, a_{d+1} . Wir wählen

$$P_\tau = P_1(\tau) = \{p : \tau \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ affin in } \tau\}.$$

Dann ist $\dim P_\tau = d + 1$. Als Freiheitsgrade wählen wir

$$B_i(p) = p(a_i), \quad i = 1, \dots, d + 1, \quad p \in P_\tau.$$

Die Basisfunktionen $p_i \in P_\tau$ sind über die Gleichung

$$p_j(a_i) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, d + 1,$$

eindeutig definiert (siehe Abbildung 6.2). Sei $d = 2$ und $\hat{\tau} \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Eckpunkten $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (1, 0)$ und $a_3 = (0, 1)$. Dann lauten die Basisfunktionen explizit:

$$p_1(x, y) = 1 - x - y, \quad p_2(x, y) = x, \quad p_3(x, y) = y, \quad (x, y) \in \hat{\tau}.$$

(2) *Quadratische Lagrangesche Finite Elemente im \mathbb{R}^2* : Sei $\tau \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Eckpunkten a_1, a_2, a_3 und Seitenmittelpunkten $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$, $i < j$ (siehe Abbildung 6.3). Wähle

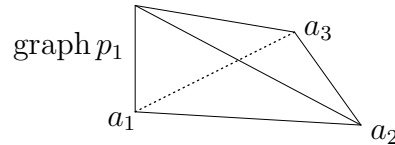


Abbildung 6.2: Graph der Basisfunktion p_1 .

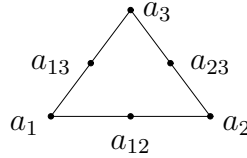


Abbildung 6.3: Quadratisches Finites Element im \mathbb{R}^2 .

$$P_\tau = P_2(\tau) = \{p : \tau \rightarrow \mathbb{R} : p(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2\}.$$

Dann ist $\dim P_\tau = 6$. Als Freiheitsgrade wählen wir wieder die Auswertungsoperatoren

$$B_i(p) = p(a_i), \quad B_{i+j+1}(p) = p(a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i < j.$$

Die Basisfunktionen sind über

$$\begin{aligned} p_j(a_i) &= \delta_{ij} & (i = 1, 2, 3, \quad j = 1, \dots, 6), \\ p_j(a_{kl}) &= \delta_{k+l+1, j} & (k, l = 1, 2, 3, \quad k < l, \quad j = 1, \dots, 6) \end{aligned}$$

definiert.

Sei $\hat{\tau}$ wieder das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$. Die Basisfunktion p_2 beispielsweise kann als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} p_2(0, 0) &= 0, & p_2(1, 0) &= 1, & p_2(0, 1) &= 0, \\ p_2\left(\frac{1}{2}, 0\right) &= 0, & p_2\left(0, \frac{1}{2}\right) &= 0, & p_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

berechnet werden. Das Ergebnis lautet (Übungsaufgabe)

$$p_2(x, y) = x(2x - 1), \quad (x, y) \in \hat{\tau}.$$

(3) *Kubische Hermitesche Finite Elemente im \mathbb{R}^2* : Sei $\tau \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit den Eckpunkten a_1, a_2, a_3 und $a_{123} = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$ (siehe Abbildung 6.4). Wir wählen

$$P_\tau = P_3(\tau), \quad \dim P_\tau = 10,$$

und

$$\begin{aligned} B_i(p) &= p(a_i), & B_4(p) &= p(a_{123}), \\ B_{i+4}(p) &= \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), & B_{i+7}(p) &= \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

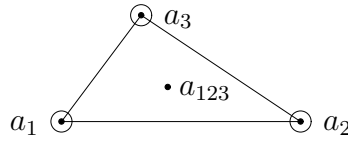


Abbildung 6.4: Kubisches Finites Element im \mathbb{R}^2 .

Als konkretes Beispiel betrachten wir das Dreieck $\hat{\tau}$ mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$. Dann ist $a_{123} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Wir berechnen

$$p_5(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^3 + \alpha_{10} y^3.$$

Die Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ werden über die Gleichungen

$$p_5(0, 0) = p_5(1, 0) = p_5(0, 1) = p_5(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial p}{\partial x}(1, 0) = \frac{\partial p}{\partial x}(0, 1) = \frac{\partial p}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial p}{\partial y}(1, 0) = \frac{\partial p}{\partial y}(0, 1) = 0$$

bestimmt. Eine kleine Rechnung ergibt (Übungsaufgabe):

$$p_5(x, y) = x(1 - 3y - 2x + 3xy + x^2 + 2y^2), \quad (x, y) \in \hat{\tau}.$$

Dies ist nur eine kleine Auswahl an möglichen Finiten Elementen, es gibt Finite Elemente über Rechtecke, Quader, krummlinige Gebiete etc. (siehe [4]).

Wir nennen Finite Elemente vom *Lagrangeschen Typ*, wenn die Freiheitsgrade durch die Auswertungsoperatoren an Punktwerten (wie in den Beispielen 6.3(1) und 6.3(2)) gegeben sind. Ferner nennen wir Finite Elemente vom *Hermiteischen Typ*, wenn einige Freiheitsgrade durch Auswertungsoperatoren gegeben sind, die Richtungsableitungen enthalten (wie Beispiel 6.3(3)).

Wie wir in Beispiel 6.3 gesehen haben, erlaubt das Dreieck $\hat{\tau} \subset \mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ relativ einfache Berechnungen. Es ist also sinnvoll, ein beliebiges Finites Element τ auf ein Referenzelement $\hat{\tau}$ zu transformieren, die Berechnungen auf $\hat{\tau}$ durchzuführen und anschließend wieder zurückzutransformieren. Seien $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine invertierbare Matrix und $b \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor. Definiere die affine Abbildung

$$F_\tau : \hat{\tau} \rightarrow \tau, \quad F_\tau(a) = Ba + b,$$

wobei τ und $\hat{\tau}$ Finite Elemente seien. Wir nennen $\hat{\tau}$ das *Referenzelement*. Sind \hat{p}_i die Basisfunktionen auf $\hat{\tau}$, so lauten die Basisfunktionen auf $\tau = F(\hat{\tau})$ gerade $p_i = \hat{p}_i \circ F^{-1}$.

Beispiel 6.4 Sei $\tau \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit den Eckpunkten $a_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, und sei $\hat{\tau} \subset \mathbb{R}^2$ das Referenzdreieck mit den Eckpunkten $e_1 = (0, 0)$, $e_2 = (1, 0)$

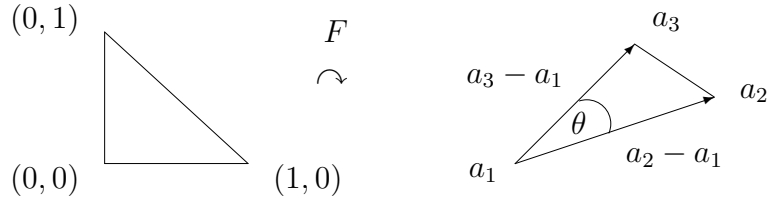


Abbildung 6.5: Abbildung zwischen zwei Finiten Elementen.

und $e_3 = (0, 1)$. Dann ist die affine Abbildung $F: \hat{\tau} \rightarrow \tau$ mit $F(e_i) = a_i, i = 1, 2, 3$, gegeben durch

$$F(a) = (a_2 - a_1, a_3 - a_1)a + a_1, \quad a \in \hat{\tau}.$$

Damit die Matrix $B = (a_2 - a_1, a_3 - a_1)$ invertierbar ist, muß natürlich $\theta > 0$ gelten (siehe Abbildung 6.5). Wir wollen die Abhängigkeit zwischen $\det B$ und θ untersuchen. Mit den Abkürzungen

$$B = (u, v) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} (\det B)^2 &= (u_1 v_2 - v_1 u_2)^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 \\ &= |u|^2 |v|^2 - |u \cdot v|^2 \\ &= |u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |u|^2 |v|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

und damit

$$|\det B| = |a_2 - a_1| |a_3 - a_1| \sin \theta.$$

Für spätere Berechnungen benötigen wir noch

$$\|B\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 = |u|^2 + |v|^2 = |a_2 - a_1|^2 + |a_3 - a_1|^2$$

und

$$\begin{aligned} \|B^{-1}\|^2 &= (\det B)^{-2} (|u|^2 + |v|^2) \\ &= \left(\frac{1}{|u|^2} + \frac{1}{|v|^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{aligned}$$

bzw.

$$\|B^{-1}\| = \left(\frac{1}{|a_2 - a_1|^2} + \frac{1}{|a_3 - a_1|^2} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \theta}.$$

Für die Definition der Finiten-Elemente-Räume benötigen wir die Begriffe der Triangulierung und der zulässigen Triangulierung.

Definition 6.5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein beschränktes Gebiet. Eine Partition T_h von Ω in Teilmengen $\tau \subset \mathbb{R}^d$, $\tau \in T_h$, heißt Triangulierung von Ω genau dann, wenn

- (1) für alle $\tau \in T_h$ gilt: τ ist abgeschlossen, $\tau^0 \neq \emptyset$ ist zusammenhängend und $\partial\tau \in C^{0,1}$;
- (2) $\bar{\Omega} = \bigcup_{\tau \in T_h} \tau$;
- (3) für alle $\tau_1, \tau_2 \in T_h$ gilt: $\tau_1^0 \cap \tau_2^0 = \emptyset$.

Hierbei bezeichnen wir mit h den maximalen Durchmesser aller $\tau \in T_h$. Um technische Schwierigkeiten bei der Formulierung zulässiger Triangulierungen zu vermeiden, setzen wir im folgenden voraus, daß die Finiten Elemente Polyeder und vom Lagrangeschen Typ sind. Wir nennen Finite Elemente, die Polyeder sind, auch *polyhedral*.

Definition 6.6 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein offener, zusammenhängender Polyeder und T_h eine Triangulierung in polyhedrale Lagrangesche Finite Elemente. Dann heißt T_h eine zulässige Triangulierung von Ω genau dann, wenn jede Seite aller $\tau_1 \in T_h$ entweder die Seite eines anderen $\tau_2 \in T_h$ oder Teil von $\partial\Omega$ ist.

Im ersten Fall nennen wir τ_1 und τ_2 *benachbart*. Eine Seite eines Finiten Elements ist eine zusammenhängende Teilmenge einer affinen Hyperfläche des \mathbb{R}^d mit nichtleerem Inneren (relativ zu dieser Hyperfläche). Ein Beispiel einer nicht zulässigen Triangulierung ist in Abbildung 6.6 gegeben. Wir schließen eine derartige Situation aus, da wir ansonsten die Stetigkeit von stückweise linearen (oder quadratischen etc.) Funktionen auf diesen Mengen nicht gewährleisten können.



Abbildung 6.6: zulässige Triangulierung (links) und nicht zulässige Triangulierung (rechts).

Zulässige Triangulierungen können natürlich auch für Finite Elemente definiert werden, die keine Polyeder oder nicht vom Lagrangeschen Typ sind. Allerdings ist dann die Definition einer "Seite" eines nicht-polyhedralen Finiten

Elements komplizierter. Die Voraussetzung Lagrangescher Finiten Elemente vereinfacht die Formulierung der Kompatibilitätsbedingungen in der Definition der Finite-Elemente-Räume.

Sei dazu T_h eine zulässige Triangulierung von Ω mit polyhedralen Lagrangeschen Finiten Elementen $(\tau, P_\tau, \Sigma_\tau)$, $\tau \in T_h$. Sei ferner N_h die Menge aller *Knoten* der Elemente von T_h , wobei die Knoten diejenigen Punkte sind, an denen die Auswertungsoperatoren für die Freiheitsgrade ausgewertet werden (also die Ecken des d -Simplex im Falle linearer Lagrangescher Finiten Elemente oder die Punkte a_i, a_{ij} für $i, j = 1, 2, 3, i < j$ aus Beispiel 6.3(2)). Zu gegebenem $b \in N_h$ sei $T_h(b)$ die Menge der Finiten Elemente, für die b ein Knoten ist. In Abbildung 6.7 ist $T_h(b)$ für den Fall linearer Lagrangescher Finiten Elemente dargestellt.

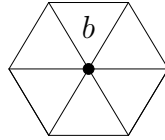


Abbildung 6.7: Zur Definition von $T_h(b)$.

Definition 6.7 Der Finite-Elemente-Raum X_h ist definiert durch

$$X_h = \left\{ v = (v_\tau)_{\tau \in T_h} \in \prod_{\tau \in T_h} P_\tau : \forall b \in N_h : \forall \tau_1, \tau_2 \in T_h(b) : B_{b, \tau_1}(v_{\tau_1}) = B_{b, \tau_2}(v_{\tau_2}) \right\}.$$

Im Falle Lagrangescher Finiten Elemente gilt

$$v_{\tau_1}(b) = B_{b, \tau_1}(v_{\tau_1}) = B_{b, \tau_2}(v_{\tau_2}) = v_{\tau_2}(b);$$

insbesondere ist eine Funktion in X_h eindeutig bestimmt durch die Menge

$$\{v(b) : b \in N_h\}.$$

Da X_h als Teilmenge des Produktraumes $\prod_{\tau \in T_h} P_\tau$ definiert ist, sind Elemente $v \in X_h$ nicht notwendigerweise Funktionen, die auf $\bar{\Omega}$ definiert sind, denn v ist möglicherweise auf Seiten benachbarter Finiten Elemente nicht eindeutig definiert. In vielen Fällen (z.B. in Beispiel 6.3) stimmen jedoch die Restriktionen $v|_{\tau_1}$ und $v|_{\tau_2}$ für jede Funktion $v \in X_h$ und alle benachbarten $\tau_1, \tau_2 \in T_h$ überein, so daß wir v mit einer auf $\bar{\Omega}$ definierten Funktion identifizieren können. In diesem Fall gilt (mit entsprechender Identifizierung):

$$X_h = \left\{ v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : \forall \tau \in T_h : v|_\tau \in P_\tau \text{ und } \forall b \in N_h : \forall \tau_1, \tau_2 \in T_h(b) : B_{b, \tau_1}(v|_{\tau_1}) = B_{b, \tau_2}(v|_{\tau_2}) \right\}.$$

Beispiel 6.8 Sei T_h eine zulässige Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit linearen Lagrangeschen Finiten Elementen. Ist a_i ein Eckpunkt von $\tau \in T_h$, so sind die Freiheitsgrade definiert durch $B_{i,\tau}(p) = p(a_i)$, $p \in P_\tau$. Die Werte einer Funktion $v \in X_h$ stimmen also an allen Eckpunkten überein. Da v stückweise linear ist, muß sie stetig sein. Daher gilt hier:

$$X_h = \{v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : \forall \tau \in T_h : v|_\tau \in P_1(\tau) \text{ und } v \text{ ist stetig in } \bar{\Omega}\}.$$

Da der Raum X_h endlichdimensional ist, besitzt er eine Basis. Wir konstruieren nun eine solche Basis mit Hilfe der (lokalen) Basisfunktionen aus Definition 6.1. Sei T_h eine zulässige Triangulierung von Ω und sei die Menge der Freiheitsgrade von X_h geschrieben in der Form

$$\Sigma_h = \{B_{h,j} : j = 1, \dots, N\}.$$

Dann bilden die Funktionen $\phi_i \in X_h$, $i = 1, \dots, N$, definiert durch

$$B_{h,j}(\phi_i) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

eine Basis von X_h . Wir nennen (ϕ_1, \dots, ϕ_N) die *globalen Basisfunktionen* von X_h . Sind die $\tau \in T_h$ lineare Lagrangesche Finite Elemente, so sind die ϕ_i eindeutig definiert durch

$$\begin{aligned} \phi_i &\in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall \tau \in T_h : \phi_i|_\tau \in P_1(\tau), \\ \phi_i(b_j) &= \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

wobei die $b_j \in N_h$ die Menge aller Ecken aller $\tau \in T_h$ ist.

Die “lokalen” und “globalen” Definitionen sind in Tabelle 1 gegenübergestellt.

Globale Definition	Lokale Definition
<ul style="list-style-type: none"> • $\bar{\Omega}$ • X_h • Globale Basisfunktionen: ϕ_1, \dots, ϕ_N, definiert auf Ω • Σ_h: Menge der Freiheitsgrade von X_h • Eckpunkte von $\bar{\Omega} : b_1, \dots, b_N$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $(\tau, P_\tau, \Sigma_\tau)$ • $P_\tau = \{v _\tau : v \in X_h\}$ • Lokale Basisfunktionen: p_1, \dots, p_n, definiert auf τ • Σ_τ: Menge der Freiheitsgrade auf τ • Eckpunkte von $\tau : a_1, \dots, a_n$

Tabelle 1: “Globale” und “lokale” Definitionen.

Lemma 6.9 Sei X_h ein Finite-Elemente-Raum und sei $k = 0, 1$. Wenn $P_\tau \subset H^{k+1}(\tau)$ für alle $\tau \in T_k$ und $X_h \subset C^k(\bar{\Omega})$, dann $X_h \subset H^{k+1}(\Omega)$.

Beweis: Wir beweisen nur den Fall $k = 0$. Der Beweis für $k = 1$ ist ähnlich. Seien $u \in X_k$ und $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann ist für $\tau \in T_h$ $u|_\tau \in P_\tau \subset H^1(\Omega)$, und wegen $\partial\tau \in C^{0,1}$ können wir den Divergenzsatz anwenden:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx &= \sum_{\tau \in T_h} \int_{\tau} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\ &= - \sum_{\tau \in T_h} \int_{\tau} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx, \end{aligned}$$

wobei wir definieren:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(u|_\tau)(x), \quad x \in \tau, \quad i = 1, \dots, d.$$

Das Lemma ist bewiesen. □

Abschließend wollen wir ein Beispiel vollständig berechnen.

Beispiel 6.10 Betrachte das Randwertproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, polyhedrales Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$ seien. Die schwache Formulierung lautet:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Wir wählen lineare Lagrangesche Finite Elemente und

$$\begin{aligned} V_h &= \{u \in X_h : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} \\ &= \{u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig; } u \text{ stückweise linear, } u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} \\ &\subset H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Seien (ϕ_1, \dots, ϕ_N) die globalen Basisfunktionen von V_h . Dann ist

$$\begin{aligned} a(\phi_j, \phi_i) &= \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx \\ &= \begin{cases} \text{const.} : a_i \text{ und } a_j \text{ liegen in demselben Dreieck} \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass unsere Forderung einer schwachbesetzten Matrix $(a(\phi_j, \phi_i))$ erfüllt ist.

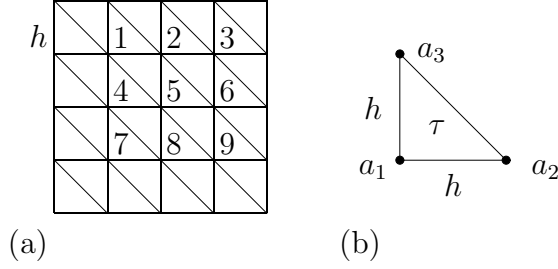


Abbildung 6.8: (a) Zur Numerierung der Knoten. (b) Zur Definition der Ecken des Dreiecks τ .

Wir wollen die Matrixelemente $(a(\phi_j, \phi_i))$ auf einer einfachen Triangulierung explizit ausrechnen. Betrachte eine Triangulierung in Dreiecke wie in Abbildung 6.8(a) mit kleinster Seitenlänge $h > 0$. Wir wählen $\Omega = (-1, 1)^2$ und $h = 1/2$. Ist τ ein solches Dreieck mit Eckpunkt a_1 wie in Abbildung 6.8(b), so lautet die Abbildung $F : \hat{\tau} \rightarrow \tau$ mit dem Standard-Referenzdreieck $\hat{\tau}$ (siehe Beispiel 6.4):

$$F(x, y) = h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1, \quad F^{-1}(x, y) = h^{-1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a_1 \right).$$

Die Basisfunktionen auf $\hat{\tau}$ lauten

$$\hat{p}_1(x, y) = 1 - x - y, \quad \hat{p}_2(x, y) = x, \quad \hat{p}_3(x, y) = y, \quad (x, y) \in \hat{\tau}.$$

Damit lauten die Basisfunktionen auf τ (mit $a_1 = (x_1, y_1)$):

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= 1 - (x - x_1)/h - (y - y_1)/h, \\ p_2(x, y) &= (x - x_1)/h, \quad p_3(x, y) = (y - y_1)/h. \end{aligned}$$

Da $u = 0$ auf $\partial\Omega$ ist, brauchen wir keine Basisfunktionen auf Finiten Elementen definieren, bei denen mindestens eine Seite Teil von $\partial\Omega$ ist. Die Anzahl der Freiheitsgrade in Ω ist 9 (siehe Abbildung 6.8(a)), also $(A_{ij}) = (a(\phi_j, \phi_i)) \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$. Um die Matrixelemente A_{ij} zu berechnen, betrachten wir einen Ausschnitt der Triangulierung wie in Abbildung 6.9. Da $\phi_i = p_i^\tau$ in $\tau \in T_h(a_i)$, erhalten wir mit der Numerierung wie in Abbildung 6.8(b) und Abbildung 6.9:

$$\begin{aligned} a(\phi_i, \phi_i) &= \sum_{i=1}^8 \int_{\tau_i} |\nabla \phi_i|^2 dx \\ &= 2 \int_{\tau_3} |\nabla p_1|^2 dx + 4 \int_{\tau_1} |\nabla p_2|^2 dx \\ &= 2 \cdot \frac{2}{h^2} \text{meas}(\tau_3) + 4 \cdot \frac{1}{h^2} \text{meas}(\tau_2) \\ &= 4, \end{aligned}$$

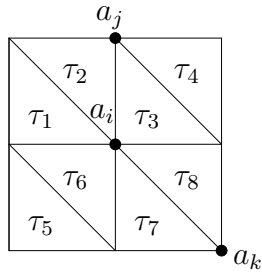


Abbildung 6.9: Zur Berechnung der Elemente der Steifigkeitsmatrix.

da $\text{meas}(\tau_i) = h^2/2$. Ferner ist

$$\begin{aligned}
 a(\phi_i, \phi_j) &= \int_{\tau_2} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx + \int_{\tau_3} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx \\
 &= \int_{\tau_2} \nabla p_3 \cdot \nabla p_1 \, dx + \int_{\tau_3} \nabla p_1 \cdot \nabla p_3 \, dx \\
 &= -h^{-2} \text{meas}(\tau_2) - h^{-2} \text{meas}(\tau_3) \\
 &= -1, \\
 a(\phi_i, \phi_k) &= \int_{\tau_7} \nabla p_3 \cdot \nabla p_2 \, dx + \int_{\tau_8} \nabla p_2 \cdot \nabla p_3 \, dx \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Für alle anderen Matricelemente gilt $A_{kl} = 0$. Daher (siehe Abbildung 6.10)

$$A_{ij} = \begin{cases} 4 & : i = j \\ -1 & : a_i \text{ und } a_j \text{ sind in demselben } \tau \text{ enthalten und } i \neq j \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Situation in Abbildung 6.8(a) erhalten wir

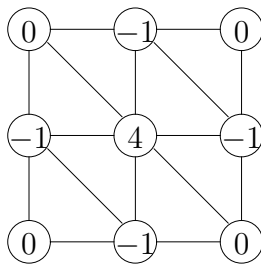


Abbildung 6.10: Fünf-Punkte-Stern des Laplace-Operators.

$$A := (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bei Neumann-Randbedingungen muß man die Basisfunktionen auch auf den Eckpunkten $a \in \partial\Omega$ definieren. In der in Abbildung 6.8(a) dargestellten Situation erhielten wir dann 25 Freiheitsgrade, d.h. $(A_{ij}) \in \mathbb{R}^{25 \times 25}$.

Wir müssen also das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

lösen, wobei $x \in \mathbb{R}^9$ und $b = (b_i) \in \mathbb{R}^9$ mit

$$b_i := F(\phi_i) = \int_{\Omega} f \phi_i \, dx.$$

Im allgemeinen müssen die Integrale in b_i mit einer Integrationsformel approximativ berechnet werden. Wir betrachten hier das einfache Beispiel $f \equiv 1$ in Ω . Dann ist (siehe Abbildung 6.9)

$$\begin{aligned} b_i &= 2 \int_{\tau_3} p_1 \, dx + 4 \int_{\tau_1} p_2 \, dx \\ &= 2 \int_0^h \int_0^{h-y} \left(1 - \frac{x}{h} - \frac{y}{h}\right) \, dx \, dy + 4 \int_0^h \int_0^{h-y} \frac{x}{h} \, dx \, dy \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} h^2 + 4 \cdot \frac{1}{6} h^2 \\ &= h^2. \end{aligned}$$

Das obige Beispiel lösen wir mit Hilfe des Programms Matlab (wir verwenden die Version 6). In Matlab kann man elliptische Differentialgleichungen der Form

$$-\operatorname{div}(c(x, y) \nabla u) + a(x, y) u = f(x, y) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

lösen, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist. In unserem Fall ist also

$$c = 1, \quad a = 0, \quad f = 1 \quad \text{in } \Omega = (-1, 1)^2.$$

Das Matlab-Programm, mit dem das diskrete Randwertproblem gelöst werden kann, lautet wie folgt:

```

1: c=1; a=0; f=1;
2: n=4; N=(n-1)^2;
3: [p,e,t]=poimesh('square',n);
4: [K,F,B,ud]=asempde('squareb1',p,e,t,c,a,f);
5: pdemesh(p,e,t);
6: for i=1:N
7:     for j=1:N
8:         fprintf('%3.0f ', K(j,i));
9:     end
10:    fprintf('\n');
11: end
12: u1=K\F
13: u2=B*u1+ud

```

Ruft man dieses Programm auf (wir nennen es **stiffness**), so erhalten wir die Abbildung 6.11 und die folgenden Zeilen:

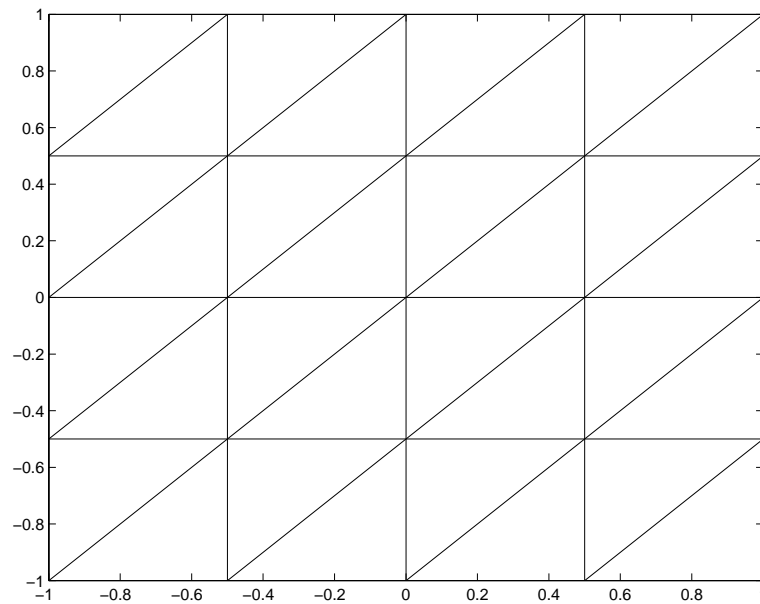


Abbildung 6.11: Gitter für das diskrete Problem.

```
>> stiffness
```

4	-1	0	-1	0	0	0	0	0
-1	4	-1	0	-1	0	0	0	0
0	-1	4	0	0	-1	0	0	0
-1	0	0	4	-1	0	-1	0	0
0	-1	0	-1	4	-1	0	-1	0
0	0	-1	0	-1	4	0	0	-1
0	0	0	-1	0	0	4	-1	0
0	0	0	0	-1	0	-1	4	-1
0	0	0	0	0	-1	0	-1	4

u1 =

0.1719
0.2187
0.1719
0.2187
0.2812
0.2187
0.1719
0.2187
0.1719

u2 =

0
0
0
0
0
0
0.1719
0.2187
0.1719
0
0
0.2187
0.2812
0.2187
0
0
0.1719
0.2187
0.1719
0

0
0
0
0
0

Um das Matlab-Programm besser zu verstehen, geben wir hier einige Erläuterungen:

- Zeile 1: definiert die Variablen für die Differentialgleichung.
- Zeile 2: Das Gebiet wird in $2n^2$ Dreiecke unterteilt. Die Steifigkeitsmatrix ist (nach Elimination der Dirichlet-Randbedingungen) von der Dimension $N \times N$.
- Zeile 3: p , e und t sind Variablen, die Matlab zur Erzeugung des Gitters benötigt. Der Befehl `poimesh` erzeugt ein gleichmäßiges Gitter auf dem vordefinierten Quadrat $(-1, 1)^2$, dessen Daten in der Datei `squareg` gespeichert sind.
- Zeile 4: Der Befehl `assempe` erzeugt die Steifigkeitsmatrix K und den Vektor der rechten Seite F . Die Variablen B und ud enthalten die Informationen über die Randbedingungen, die mittels der vordefinierten Datei `squareb1` übergeben werden.
- Zeile 5: `pdemesh` zeichnet das gleichmäßige Gitter (siehe Abbildung 6.11).
- Zeilen 6-11: Die Steifigkeitsmatrix K wird mittels `fprintf` ausgedruckt. Nach jeder Matrixzeile kommt ein Zeilenumbruch mit `fprintf('\n')`.
- Zeile 12: u_1 ist die Lösung des Gleichungssystems $K u_1 = F$ und ist eine $N \times N$ -Matrix, die zeilenweise ausgedruckt wird.
- Zeile 13: u_2 ist die gesuchte Approximation der elliptischen Differentialgleichung. Es ist eine $n \times n$ -Matrix, die ebenfalls zeilenweise ausgegeben wird.

7 Fehlerabschätzung in $H^1(\Omega)$

In Kapitel 5 haben wir gezeigt, daß die Differenz der Lösung des Problems

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \quad (7.1)$$

und der Lösung $u_h \in V_h \subset V$ des diskreten Problems

$$a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h \quad (7.2)$$

unter gewissen Voraussetzungen durch die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V$$

gegeben ist (Lemma 5.2). In diesem Kapitel wollen wir zeigen, daß für lineare Finite Elemente

$$\|u - u_h\|_V \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

gilt, und wir wollen die Konvergenzgeschwindigkeit (d.h. die Konvergenzordnung) bestimmen. Die Idee des Konvergenzbeweises ist wie folgt. Seien X_h der Finite-Elemente-Raum zu linearen Lagrangeschen Finiten Elementen mit Eckpunkten a_1, \dots, a_N , $V_h = X_h \cap V$ und (ϕ_1, \dots, ϕ_N) eine Basis von V_h . Wir wählen in der obigen Ungleichung ein spezielles $v \in V_h$, nämlich

$$\Pi_h u = \sum_{i=1}^N u(a_i) \phi_i \in V_h.$$

Dann ist

$$\|u - u_h\|_V \leq C \|u - \Pi_h u\|_V,$$

und es genügt, die Güte der Approximation von u durch $\Pi_h u$ zu untersuchen. Wir definieren etwas allgemeiner:

Definition 7.1 Sei X_h ein Finite-Elemente-Raum mit Freiheitsgraden B_1, \dots, B_N . Wir nennen

$$\Pi_h v = \sum_{i=1}^N B_i(v) \phi_i, \quad v \in C^s(\bar{\Omega}),$$

mit $s \in \mathbb{N}_0$ die Interpolierende von v . Hierbei ist $s \geq 0$ so, daß die Werte $B_i(v)$ definiert sind.

Als Freiheitsgrade wählen wir im allgemeinen

$$B_i(v) = v(b_i) \quad \text{oder} \quad B_i(v) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(b_i) \text{ etc.},$$

wobei b_1, \dots, b_N die Knoten der Finiten Elemente sind. Im ersten Fall ist $s = 0$, im zweiten $s = 1$. Wenn $s = 0$, nennen wir Π_h die *lineare Interpolierende*.

Für die Abschätzung von $\|u - \Pi_h u\|_V$ transformieren wir auf ein Referenzelement, schätzen dort ab und transformieren wieder auf das ursprüngliche Finite Element. Dazu benötigen wir mehrere Lemmata.

Definition 7.2 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) offen, $m \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$. Wir nennen

$$|u|_{W^{m,p}} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, \quad u \in W^{m,p}(\Omega),$$

die Halbnorm von u .

Definition 7.3 Seien $\Omega, \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) beschränkte Gebiete mit $\partial\Omega, \partial\hat{\Omega} \in C^{0,1}$. Wir nennen Ω und $\hat{\Omega}$ affin äquivalent genau dann, wenn es eine invertierbare Abbildung

$$F : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega, \quad F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$$

mit $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $b \in \mathbb{R}^d$ gibt.

Lemma 7.4 Seien $\Omega, \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) zwei affin äquivalente Gebiete, $m \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$, und $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Dann gilt $\hat{u} = u \circ F \in W^{m,p}(\hat{\Omega})$ und es existiert eine von u unabhängige Konstante $C_1 > 0$, so daß

$$\begin{aligned} |\hat{u}|_{W^{m,p}} &\leq C_1 \|B\|^m |\det B|^{-1/p} |u|_{W^{m,p}}, \\ |u|_{W^{m,p}} &\leq C_1 \|B^{-1}\|^m |\det B|^{1/p} |\hat{u}|_{W^{m,p}}. \end{aligned}$$

In diesem Lemma ist $\|B\|$ die euklidische Matrixnorm von $B = (B_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$, d.h.

$$\|B\| = \left(\sum_{i,j=1}^d B_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Sei $|\cdot|$ die euklidische Norm in \mathbb{R}^d . Dann ist $\|\cdot\|$ mit $|\cdot|$ verträglich, d.h., es gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$|B\xi| \leq \|B\| |\xi| \quad \text{und} \quad |\xi^T B| \leq \|B\| |\xi|. \quad (7.3)$$

Beweis: Seien zunächst $p < \infty$ und $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Dann gilt für $x = F(\hat{x}) \in \Omega$

$$\nabla \hat{u}(\hat{x}) = \nabla(u \circ F)(\hat{x}) = \nabla u(x) F'(\hat{x}) = \nabla u(x) B.$$

Wir betrachten nun die folgende Ungleichungskette:

$$\left(\sum_{i=1}^d a_i^p \right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^d a_i \leq d^{1-1/p} \left(\sum_{i=1}^d a_i^p \right)^{1/p} \quad \forall a_1, \dots, a_d \geq 0, \quad p \geq 1. \quad (7.4)$$

(Die erste Ungleichung folgt aus der Jensenschen Ungleichung, die zweite aus der Hölderschen Ungleichung.) Dies impliziert für $p \geq 2$

$$\left(\sum_{i=1}^d a_i^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^d (a_i^2)^{p/2} \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^d a_i^2 \right)^{1/2},$$

und für $1 \leq p < 2$

$$\left(\sum_{i=1}^d a_i^p \right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^d a_i \leq d^{1-1/2} \left(\sum_{i=1}^d a_i^2 \right)^{1/2} \leq d \left(\sum_{i=1}^d a_i^2 \right)^{1/2},$$

insgesamt also für $p \geq 1$

$$\left(\sum_{i=1}^d a_i^p \right)^{1/p} \leq d \left(\sum_{i=1}^d a_i^2 \right)^{1/2}.$$

Analog ist

$$\left(\sum_{i=1}^d a_i^2 \right)^{1/2} \leq d \left(\sum_{i=1}^d a_i^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Daher ist wegen (7.3)

$$\begin{aligned} \left(\sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha \hat{u}(\hat{x})|^p \right)^{1/p} &\leq d |\nabla \hat{u}(\hat{x})| \\ &\leq d \|B\| |\nabla u(x)| \\ &\leq d^2 \|B\| \left(\sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u(x)|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Integration über $\hat{\Omega}$ und Anwendung des Transformationssatzes liefert

$$\begin{aligned} |\hat{u}|_{W^{1,p}(\hat{\Omega})} &= \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_{\hat{\Omega}} |D^\alpha \hat{u}(\hat{x})|^p d\hat{x} \right)^{1/p} \\ &\leq d^2 \|B\| \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p |\det B^{-1}| dx \right)^{1/p} \\ &= C_1 \|B\| |\det B^{-1}|^{1/p} |u|_{W^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

mit $C_1 = d^2$. Daher $\hat{u} \in W^{1,p}(\hat{\Omega})$. Die Ungleichung für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ folgt aus einem Dichtheitsargument (siehe Satz 3.9(1)). Der Beweis für $m > 1$ geht analog, ebenso die zweite Ungleichung. Da die Konstante C_1 nicht von p abhängt, kann man

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

verwenden, um die Aussage des Satzes für $p = \infty$ zu erhalten. \square

Wir schätzen nun $\|B\|$ und $|\det B|$ ab (siehe auch Beispiel 6.4).

Lemma 7.5 Seien Ω und $\hat{\Omega}$ affin äquivalent, $h = \text{diam}(\Omega)$, $\hat{h} = \text{diam}(\hat{\Omega})$ und

$$\begin{aligned}\rho &= \sup\{\text{diam}(K) : K \subset \Omega \text{ Kugel}\}, \\ \hat{\rho} &= \sup\{\text{diam}(K) : K \subset \hat{\Omega} \text{ Kugel}\}.\end{aligned}$$

Dann gilt

$$|\det B| = \frac{\text{meas}(\Omega)}{\text{meas}(\hat{\Omega})}, \quad (7.5)$$

$$\|B\| \leq h/\hat{\rho}, \quad \|B^{-1}\| \leq \hat{h}/\rho. \quad (7.6)$$

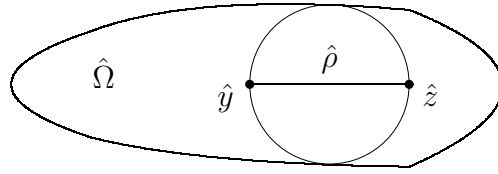


Abbildung 7.1: Illustration für den Beweis von Lemma 7.5.

Beweis: Die Aussage (7.5) folgt aus der Tatsache, daß $|\det B|$ die Volumenänderung von $\hat{\Omega}$ mißt. Für den Beweis von (7.6) bemerken wir, daß

$$\|B\| = \sup_{|\xi|=1} |B\xi|$$

gilt. Sei also $\xi \in \mathbb{R}^d$ mit $|\xi| = 1$. Definiere $\hat{x} = \hat{\rho}\xi$. Nach Definition von $\hat{\rho}$ existieren $\hat{y}, \hat{z} \in (\hat{\Omega})^-$ mit $\hat{y} - \hat{z} = \hat{x}$ (siehe Abbildung 7.1). Daher gilt

$$|B\hat{x}| = |F(\hat{y}) - F(\hat{z})| \leq h,$$

denn $h = \text{diam}(\Omega) = \sup\{|x - y| : x, y \in \Omega\}$, und es folgt

$$|B\xi| = |B\hat{x}|/\hat{\rho} \leq h/\hat{\rho}$$

und $\|B\| \leq h/\hat{\rho}$. Die andere Ungleichung kann analog gezeigt werden. \square

Lemma 7.6 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) offen, seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $a_\alpha \in \mathbb{R}$ für $|\alpha| \leq m$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Dann existiert genau ein Polynom $p \in P_m(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} D^\alpha p \, dx = a_\alpha \quad \forall |\alpha| \leq m. \quad (7.7)$$

Beweis: Seien $p(x) = \sum_{|\beta| \leq m} b_\beta x^\beta$ und $a = (a_\alpha)$, $b = (b_\beta)$. Dann ist (7.7) genau dann erfüllt, wenn das lineare Gleichungssystem

$$Mb = a$$

mit

$$M = (M_{\alpha\beta}), \quad M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} D^\alpha x^\beta dx, \quad |\alpha|, |\beta| \leq m,$$

lösbar ist. Angenommen, die Matrix M ist nicht invertierbar. Dann gibt es eine Lösung $q \in P_m(\Omega)$ des homogenen Systems $Mq = 0$ mit $q \neq 0$ und q ist von der Ordnung m . Dies bedeutet

$$\int_{\Omega} D^\alpha q dx = 0 \quad \forall |\alpha| \leq m.$$

Da q von der Ordnung m ist, existiert ein α mit $|\alpha| = m$, so daß $D^\alpha q = \text{const.} \neq 0$; Widerspruch. \square

Das folgende Lemma ist eine Konsequenz des Satzes 4.7 von Bramble-Hilbert.

Lemma 7.7 *Seien $m, k \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq k$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert eine Konstante $C_2 > 0$, so daß für alle $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit der Eigenschaft*

$$\int_{\Omega} D^\alpha u dx = 0 \quad \forall |\alpha| \leq k-1 \tag{7.8}$$

gilt:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C_2 |u|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Für $k = m = 1$ liefert dieses Lemma eine Verallgemeinerung der Poincaré-Ungleichung: Für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\int_{\Omega} u dx = 0$ folgt $\|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{W^{1,p}} \leq C_2 |\nabla u|_{L^p}$.

Beweis: Wir beweisen das Lemma nur für $p < \infty$ (der Fall $p = \infty$ geht ähnlich). Definiere die Halbnormen

$$\mu_\alpha(u) = \int_{\Omega} D^\alpha u dx, \quad |\alpha| \leq k-1,$$

für beliebige $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Wegen

$$|\mu_\alpha(u)| \leq \int_{\Omega} |D^\alpha u| dx \leq \|u\|_{W^{k-1,1}} \leq C \|u\|_{W^{k,p}}$$

sind die Funktionale μ_α stetig. Hier und im folgenden bezeichnet $C > 0$ eine generische Konstante, deren Wert sich von Auftreten zu Auftreten ändern kann. Ist $p \in P_{k-1}(\Omega)$ gegeben mit $\mu_\alpha(p) = 0$ für alle $|\alpha| \leq k-1$, so folgt sofort

$p = 0$. Wir können also den Satz 4.7 von Bramble-Hilbert anwenden. Es folgt die Existenz einer Konstanten $C_2 > 0$, so daß für alle $u \in W^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{W^{m,p}} \leq \|u\|_{W^{k,p}} \leq C_2 \left(|u|_{W^{k,p}}^p + \sum_{|\alpha| \leq k-1} \mu_\alpha(u)^p \right)^{1/p}.$$

Ist nun $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit der Eigenschaft (7.8) gegeben, so folgt $\mu_\alpha(u) = 0$ und daher

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C_2 |u|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

also die Behauptung. \square

Wir wollen nun $u - \Pi_h u$ auf einem Finiten Element τ abschätzen. Seien $(\tau, P_\tau, \Sigma_\tau)$ und $(\hat{\tau}, \hat{P}_\tau, \hat{\Sigma}_\tau)$ zwei affin äquivalente Finite Elemente mit Freiheitsgraden B_1, \dots, B_n bzw. $\hat{B}_1, \dots, \hat{B}_n$ und Basisfunktionen $p_1, \dots, p_n \in P_\tau$ bzw. $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \in \hat{P}_\tau$. (Genauer gesagt, seien $(\tau, P_\tau, \Sigma_\tau)$ und $(\hat{\tau}, \hat{P}_\tau, \hat{\Sigma}_\tau)$ zwei Finite Elemente, so daß τ und $\hat{\tau}$ affin äquivalent sind.) Es gelte $P_\tau \subset C^s(\tau)$ mit $s \geq 0$. Die Interpolierende auf τ ist (siehe Definition 7.1)

$$\Pi_h u(x) = \sum_{i=1}^n B_i(u) p_i(x) \quad \text{für } u \in C^s(\tau), x \in \tau.$$

Wir bemerken, daß die Interpolierende die Eigenschaft

$$\Pi_h p = p \quad \forall p \in P_\tau \tag{7.9}$$

besitzt, denn für $p = \sum_{j=1}^n \alpha_j p_j \in P_\tau$ folgt aus $B_i(p_j) = \delta_{ij}$:

$$\Pi_h p(x) = \sum_{i=1}^n B_i(p) p_i(x) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_j B_i(p_j) p_i(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i(x) = p(x).$$

Der transformierte Interpolationsoperator auf $\hat{\tau}$ stimmt mit dem natürlichen Interpolationsoperator

$$\hat{\Pi}_h \hat{u} = \sum_{i=1}^n \hat{B}_i(\hat{u}) \hat{p}_i, \quad \hat{u} \in C^s(\hat{\tau}),$$

überein, und es gilt $\hat{\Pi}_h \hat{u}(\hat{x}) = \Pi_h u(x)$ für $\hat{u} = u \circ F$. Die Freiheitsgrade sind gegeben durch $\hat{B}_i(\hat{u}) = B_i(u)$ und die Basisfunktionen sind $\hat{p}_i = p_i \circ F$, denn

$$\hat{B}_i(\hat{p}_j) = B_i(p_j) = \delta_{ij}.$$

Daher

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_h \hat{u}(\hat{x}) &= \sum_{i=1}^n B_i(u) p_i(F(\hat{x})) \\ &= \sum_{i=1}^n B_i(u) p_i(x) \\ &= \Pi_h u(x). \end{aligned}$$

Lemma 7.8 Seien $(\tau, P_\tau, \Sigma_\tau)$ und $(\hat{\tau}, \hat{P}_\tau, \hat{\Sigma}_\tau)$ zwei affin äquivalente Finite Elemente mit

$$h_\tau = \text{diam}(\tau) \quad \text{und} \quad \rho_\tau = \sup\{\text{diam}(K) : K \subset \tau \text{ Kugel}\}.$$

Seien $m, k, s \in \mathbb{N}_0$, $m \leq k$ und $1 \leq p, q \leq \infty$, so daß

$$W^{k,p}(\hat{\tau}) \hookrightarrow C^s(\hat{\tau}), \quad W^{k,p}(\hat{\tau}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{\tau}), \quad P_{k-1}(\hat{\tau}) \subset \hat{P}_\tau \subset C^s(\hat{\tau}) \cap W^{m,q}(\hat{\tau}). \quad (7.10)$$

Dann existiert eine Konstante $C_3 > 0$, so daß für alle $u \in W^{k,p}(\tau)$ gilt:

$$|u - \Pi_h u|_{W^{m,q}(\tau)} \leq C_3 \frac{h_\tau^k}{\rho_\tau^m} \text{meas}(\tau)^{1/q-1/p} |u|_{W^{k,p}(\tau)}.$$

Die Konstante C_3 hängt natürlich von $\hat{\tau}$, aber nicht von τ ab. Die obigen Einbettungen gelten, wenn $k - d/p > s$ und $k - d/p \geq m - d/q$ (siehe Satz 3.11). Die Räume $W^{k,p}(\hat{\tau})$ bzw. $W^{k,p}(\tau)$ bedeuten streng genommen $W^{k,p}(\hat{\tau}^0)$ bzw. $W^{k,p}(\tau^0)$ (die Finiten Elemente $\hat{\tau}$ bzw. τ sind ja gemäß Definition abgeschlossene Mengen).

Beweis: 1. Schritt: Sei $u \in W^{k,p}(\tau)$ mit $\hat{u} = u \circ F$. Dann implizieren die Einbettungen (7.10) $\hat{\Pi}_h \hat{u} \in \hat{P}_\tau \subset W^{m,q}(\hat{\tau})$ und

$$\begin{aligned} \|\hat{\Pi}_h \hat{u}\|_{W^{m,q}} &\leq \sum_{i=1}^n |\hat{B}_i(\hat{u})| \|\hat{p}_i\|_{W^{m,q}} \\ &\leq \sum_{i=1}^n c_i \|\hat{u}\|_{C^s(\hat{\tau})} \|\hat{p}_i\|_{W^{m,q}} \\ &= \hat{C} \|\hat{u}\|_{C^s(\hat{\tau})} \\ &\leq C \|\hat{u}\|_{W^{k,p}}, \end{aligned}$$

wobei $\hat{C} = \sum_i c_i \|\hat{p}_i\|_{W^{m,q}}$.

Sei nun $\hat{p} \in P_{k-1}(\hat{\tau}) \subset \hat{P}_\tau$. Nach (7.9) gilt dann $\hat{\Pi}_h \hat{p} = \hat{p}$. Wir erhalten mit obiger Abschätzung für $\hat{\Pi}_h \hat{u}$ und den Einbettungen (7.10)

$$\begin{aligned} |\hat{u} - \hat{\Pi}_h \hat{u}|_{W^{m,q}} &= |\hat{u} + \hat{p} - \hat{\Pi}_h(\hat{u} + \hat{p})|_{W^{m,q}} \\ &\leq \|\hat{u} + \hat{p}\|_{W^{m,q}} + \|\hat{\Pi}_h(\hat{u} + \hat{p})\|_{W^{m,q}} \\ &\leq \|\hat{u} + \hat{p}\|_{W^{m,q}} + C \|\hat{u} + \hat{p}\|_{W^{k,p}} \\ &\leq C \|u + \hat{p}\|_{W^{k,p}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.6 existiert ein $\hat{p} \in P_{k-1}(\hat{\tau})$ zu $a_\alpha = \int_{\hat{\tau}} D^\alpha \hat{u} \, dx$, so daß

$$\int_{\hat{\tau}} D^\alpha (\hat{u} + \hat{p}) \, dx = 0 \quad \forall |\alpha| \leq k - 1.$$

Daher können wir Lemma 7.7 anwenden und erhalten

$$\|\hat{u} + \hat{p}\|_{W^{k,p}} \leq C_2 |\hat{u} + \hat{p}|_{W^{k,p}} = C_2 |\hat{u}|_{W^{k,p}}.$$

Mit obiger Abschätzung ergibt sich

$$|\hat{u} - \hat{\Pi}_h \hat{u}|_{W^{m,q}} \leq C |\hat{u}|_{W^{k,p}}.$$

2. *Schritt:* Mit den Lemmata 7.4 und 7.5 folgt

$$\begin{aligned} |u - \Pi_h u|_{W^{m,q}} &\leq C_1 \|B^{-1}\|^m |\det B|^{1/q} |\hat{u} - \hat{\Pi}_h \hat{u}|_{W^{m,q}} \\ &\leq C \|B^{-1}\|^m |\det B|^{1/q} |\hat{u}|_{W^{k,p}} \\ &\leq C \|B^{-1}\|^m \|B\|^k |\det B|^{1/q-1/p} |u|_{W^{k,p}} \\ &\leq C \frac{\hat{h}_\tau^m \hat{h}_\tau^k \operatorname{meas}(\tau)^{1/q-1/p}}{\rho_\tau^m \hat{\rho}_\tau^k \operatorname{meas}(\hat{\tau})^{1/q-1/p}} |u|_{W^{k,p}} \\ &\leq C_3 \frac{h_\tau^k}{\rho_\tau^m} \operatorname{meas}(\tau)^{1/q-1/p} |u|_{W^{k,p}}. \end{aligned}$$

Das Lemma ist bewiesen. \square

Betrachte das Dreieck τ im \mathbb{R}^2 wie in Beispiel 6.4. In diesem Beispiel haben wir gezeigt, daß $\|B^{-1}\| \rightarrow \infty$ für Innenwinkel $\theta \rightarrow 0$ gilt. Nach obigem Beweis ist aber für $p = q = 2$

$$|u - \Pi_h u|_{H^m} \leq C_{\hat{\tau}} \|B^{-1}\|^m \|B\|^k |u|_{H^k},$$

d.h., die Konstante $C_{\hat{\tau}} \|B^{-1}\|^m \|B\|^k$ wächst über alle Grenzen für $\theta \rightarrow 0$. In diesem Fall geht auch der Radius des maximalen Innenkreises im Dreieck gegen Null. Dies bedeutet, daß die Abschätzung unbrauchbar wird. Wir müssen also ausschließen, daß für die Elemente einer Familie von Triangulierungen die Innenwinkel oder der maximale Innenkreisdurchmesser gegen Null gehen. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 7.9 *Eine Familie von Triangulierungen $(T_h)_{h>0}$ heißt regulär genau dann, wenn es ein $\sigma > 0$ gibt, so daß für alle $\tau \in \bigcup_{h>0} T_h$*

$$\frac{h_\tau}{\rho_\tau} \leq \sigma \tag{7.11}$$

gilt, und wenn

$$h = \max_{\tau \in T_h} h_\tau \rightarrow 0.$$

Man kann zeigen, daß für Dreiecks-Finite-Elemente (7.11) äquivalent zu *Zlá-mals Bedingung* ist: Es existiert ein $\alpha_0 > 0$, so daß für alle $\tau \in \bigcup_{h>0} T_h$ gilt:

$$\alpha_\tau \geq \alpha_0 > 0,$$

wobei α_τ der kleinste Winkel in τ ist.

Wir setzen voraus:

Sei (T_h) eine Familie zulässiger, regulärer Triangulierungen eines beschränkten polyhedralen Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) mit Finiten Elementen $(\tau, P_\tau, \Sigma_\tau)$, $\tau \in \bigcup_{h>0} T_h$, die affin äquivalent zu einem einzigen Referenz-Finite-Element $(\hat{\tau}, \hat{P}_\tau, \hat{\Sigma}_\tau)$ sind. (7.12)

Das Referenzelement $(\hat{\tau}, \hat{P}_\tau, \hat{\Sigma}_\tau)$ erfülle die Inklusionen (7.13)

$$\left. \begin{aligned} W^{k,p}(\hat{\tau}) &\hookrightarrow C^s(\hat{\tau}), \quad W^{k,p}(\hat{\tau}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{\tau}), \\ P_{k-1}(\hat{\tau}) &\subset \hat{P}_\tau \subset C^s(\hat{\tau}) \cap W^{m,q}(\hat{\tau}), \\ \text{wobei } m, k, s &\in \mathbb{N}_0, \quad m \leq k, \quad 1 \leq p, q \leq \infty. \end{aligned} \right\}$$

Wir beweisen nun:

Satz 7.10 *Es gelten die Voraussetzungen (7.12)-(7.13) und $p \leq q$. Dann existiert eine Konstante $C_4 > 0$, so daß für alle $u \in W^{k,p}(\Omega)$ gilt:*

$$\|u - \Pi_h u\|_{W^{m,q}(\Omega)} \leq C_4 h^{k-m+d(1/q-1/p)} |u|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Beweis: Sei $h > 0$ und $\bar{\Omega} = \bigcup_{\tau \in T_h} \tau$. Die zweite Einbettung in Voraussetzung (7.13) impliziert $k - m + d(1/q - 1/p) \geq 0$. Nach Voraussetzung ist (T_h) regulär, d.h. $\rho_\tau^{-1} \leq \sigma h_\tau^{-1}$. Lemma 7.8 impliziert daher für $0 \leq l \leq m$:

$$\begin{aligned} |u - \Pi_h u|_{W^{l,q}(\Omega)} &= \left(\sum_{\tau \in T_h} |u - \Pi_h u|_{W^{l,q}(\tau)}^q \right)^{1/q} \\ &\leq C_3 \sigma^l \left(\sum_{\tau \in T_h} h_\tau^{q(k-l)+d(1-q/p)} |u|_{W^{k,p}(\tau)}^q \right)^{1/q} \\ &\leq C_3 \sigma^l h^{k-l+d(1/q-1/p)} \left(\sum_{\tau \in T_h} |u|_{W^{k,p}(\tau)}^q \right)^{1/q} \\ &\leq C_3 \sigma^l h^{k-l+d(1/q-1/p)} \left(\sum_{\tau \in T_h} |u|_{W^{k,p}(\tau)}^p \right)^{1/p} \\ &= C_3 \sigma^l h^{k-l+d(1/q-1/p)} |u|_{W^{k,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei wir $\text{meas}(\tau) \leq ch_\tau^d$, (7.4) und $p < q$ verwendet haben. Folglich ist

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_h u\|_{W^{m,q}(\Omega)} &= \left(\sum_{l=0}^m |u - \Pi_h u|_{W^{l,q}}^q \right)^{1/q} \\ &\leq C_3 h^{k-m+d(1/q-1/p)} \left(\sum_{l=0}^m \sigma^{ql} |u|_{W^{k,p}}^q \right)^{1/q} \\ &\leq C_4 h^{k-m+d(1/q-1/p)} |u|_{W^{k,p}}, \end{aligned}$$

wobei $C_4 = C_3 \left(\sum_{l=0}^m \sigma^{ql} \right)^{1/q}$ und wir $h \leq 1$ vorausgesetzt haben (diese Einschränkung ist ohne Belang, da wir uns für $h \rightarrow 0$ interessieren). \square

Beispiel 7.11 Wir konkretisieren die Voraussetzungen (7.12)-(7.13) für lineare Lagrangesche Finite Elemente. Für diese Elemente gilt offenbar

$$P_1(\hat{\tau}) \subset \hat{P}_\tau \subset C^0(\hat{\tau}),$$

d.h. $k = 2$ und $s = 0$. Um die Berechnungen zu vereinfachen, setzen wir $p = q = 2$. Dann sind die Einbettungen in (7.13) genau dann erfüllt, wenn $2 - d/2 > 0$ und $2 - d/2 \geq m - d/2$ gilt. Dies ist äquivalent zu $d \leq 3$ und $m \leq 2$. Da außerdem $\hat{P}_\tau \subset H^m(\hat{\tau})$ gelten soll, müssen wir insgesamt

$$d \leq 3 \quad \text{und} \quad m \leq 1$$

fordern. Dann gilt nach Satz 7.10 für alle $u \in H^2(\Omega)$

$$\|u - \Pi_h u\|_{H^m(\Omega)} \leq C_4 h^{2-m} |u|_{H^2(\Omega)}. \quad (7.14)$$

Wir können nun eine Fehlerabschätzung für $u - u_h$ in $H^1(\Omega)$ beweisen. Sei dazu $u \in V \subset H^1(\Omega)$ die Lösung des Problems

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \quad (7.15)$$

mit stetiger koerziver Bilinearform a auf V und $F \in V'$. Ferner sei $u_h \in V_h = X_h \cap V$ (mit Finite-Elemente-Raum X_h) die Lösung des diskreten Problems

$$a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h. \quad (7.16)$$

Satz 7.12 *Es gelte (7.12) mit linearen Lagrangeschen Finiten Elementen, $d \leq 3$, und es seien u, u_h wie oben. Dann gilt*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und definiere $Z = H^2(\Omega) \cap V$. Da Z dicht in V ist, existiert ein $w \in Z$ mit $\|u - w\|_V \leq \varepsilon/2$. Nach Satz 7.10 gilt außerdem (siehe (7.14))

$$\|w - \Pi_h w\|_V \leq Ch|w|_{H^2}.$$

Also existiert ein $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$, so daß für alle $0 < h \leq h_0$

$$\|w - \Pi_h w\|_V \leq \varepsilon/2.$$

Dies impliziert

$$\|u - \Pi_h u\|_V \leq \|u - w\|_V + \|w - \Pi_h w\|_V \leq \varepsilon$$

und damit

$$\|u - u_h\|_V \leq \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V \leq \|u - \Pi_h w\|_V \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. \square

Wir erhalten eine präzise Fehlerabschätzung für $\|u - u_h\|_V$, wenn die Lösung u regulär ist.

Satz 7.13 *Es gelten (7.12) und (7.13) mit $m = 1$, $k \geq 1$ und $p = q = 2$. Seien u, u_h wie oben. Ferner gelte $u \in H^k(\Omega)$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $h > 0$ gilt*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{k-1}|u|_{H^k(\Omega)}.$$

Beweis: Nach dem Lemma 5.2 von Céa und Satz 7.10 folgt

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V \leq \|u - \Pi_h u\|_{H^1} \leq Ch^{k-1}|u|_{H^k(\Omega)}$$

und damit die Behauptung. □

Die Aussage von Satz 7.14 ist, daß die Fehlerabschätzung von der Ordnung $k - 1$ ist, sofern Finite Elemente verwendet werden, für die (unter anderen) gilt: $P_{k-1}(\hat{\tau}) \subset \hat{P}_\tau \subset C^s(\bar{\hat{\tau}})$. Im Falle linearer Finite Elemente mit $k = 2$ und $s = 0$ erhalten wir eine Abschätzung der Ordnung eins. Allerdings gilt dies nur, wenn $u \in H^2(\Omega)$. Unter welchen Voraussetzungen gilt das?

Die Regularitätseigenschaft von u hängt von dem konkreten Randwertproblem ab. Betrachte etwa

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei L ein allgemeiner elliptischer Differentialoperator wie in (4.10) sei. Sind die Koeffizienten von L "glatt" genug ($C^1(\bar{\Omega})$ genügt), $\partial\Omega \in C^2$ und $f \in L^2(\Omega)$, so gilt nach Satz 4.10 $u \in H^2(\Omega)$. Die Voraussetzung $\partial\Omega \in C^2$ schließt allerdings polyhedrale Gebiete aus, für die nur $\partial\Omega \in C^{0,1}$ gilt! Nach der Bemerkung nach Satz 4.10 kann diese Voraussetzung durch *konvexe* Ω ersetzt werden.

Kann man bessere Konvergenzordnungen für $\|u - u_h\|_V$ (d.h. $O(h^\alpha)$ mit $\alpha > 1$) erhalten, wenn die Lösung u regulär ist? Sofern man *lineare* Finite Elemente verwendet, lautet die Antwort: nein. Für Finite Elemente höherer Ordnung (z.B. quadratisch, kubisch; siehe Kapitel 6) und genügend reguläres u ist dies dagegen nach Satz 7.10 möglich.

8 Fehlerabschätzung in $L^2(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$

Es sei eine Finite-Elemente-Diskretisierung eines elliptischen Randwertproblems mit linearen Lagrangeschen Elementen gegeben, d.h., es gelte (7.12)-(7.13) mit $k = 2$, $m \leq 1$, $s = 0$, $p = q = 2$ und $d \leq 3$, und es sei $u \in V \subset H^1(\Omega)$ die Lösung von (7.15) und $u_h \in V_h$ die Lösung von (7.16). Nach Satz 7.10 gilt für die Differenz der Lösung u und deren linearer Interpolierenden

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2} \leq C_4 h^2 |u|_{H^2},$$

sofern $u \in H^2(\Omega)$ ist. Man könnte nun vermuten, daß dann der L^2 -Fehler durch

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C h^2 |u|_{H^2}$$

gegeben ist. Dies folgt nicht aus dem Lemma von Céa, da dort in der H^1 -Norm abgeschätzt wird. Für den Beweis der Fehlerabschätzung in L^2 benötigen wir die Existenz und Regularität der Lösung eines adjungierten Problems.

Definition 8.1 Sei a eine Bilinearform auf V , $F \in V'$ und

$$a^*(u, v) := a(v, u), \quad u, v \in V.$$

Dann heißt

$$a^*(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \tag{8.1}$$

das zu (7.15) adjungierte Problem.

Wenn die Bilinearform a symmetrisch ist, gilt natürlich $a^* = a$.

Satz 8.2 Es gelte (7.12) mit linearen Lagrangeschen Finiten Elementen, $d \leq 3$, und es seien u, u_h wie oben. Ferner setzen wir voraus, daß $F \in L^2(\Omega)$ und daß das Problem (8.1) eine Lösung $u^* \in H^2(\Omega) \cap V$ mit

$$\|u^*\|_{H^2} \leq C^* \|F\|_{L^2}$$

besitzt. Dann existiert eine von u und h unabhängige Konstante $C_5 > 0$, so daß

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C_5 h^2 |u|_{H^2}.$$

Beweis: Die Existenz und Eindeutigkeit des adjungierten Problems folgt aus dem Lemma 4.2 von Lax-Milgram, da a^* wegen $a^*(u, u) = a(u, u) \geq \lambda \|u\|_V^2$ für alle $u \in V$ koerziv ist. Sei u^* die Lösung von (8.1). Nach Voraussetzung gilt $u^* \in H^2(\Omega)$, und wir können Satz 7.10 auf u^* anwenden:

$$\inf_{v \in V_h} \|u^* - v\|_{H^1} \leq \|u^* - \Pi_h u^*\|_{H^1} \leq C_4 h |u^*|_{H^2} \leq C_4 C^* h \|F\|_{L^2}. \tag{8.2}$$

Subtraktion von (7.15) und (7.16) ergibt

$$a(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h. \quad (8.3)$$

Der Rest des Beweises basiert auf der Charakterisierung

$$\|u - u_h\|_{L^2} = \sup_{\|f\|_{L^2}=1} |(f, u - u_h)_{L^2}|, \quad (8.4)$$

die man folgendermaßen einsieht: Einerseits gilt nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\sup_{\|f\|_{L^2}=1} |(f, u - u_h)_{L^2}| \leq \sup_{\|f\|_{L^2}=1} \|f\|_{L^2} \|u - u_h\|_{L^2} = \|u - u_h\|_{L^2},$$

andererseits folgt für $f_0 = (u - u_h)/\|u - u_h\|_{L^2}$

$$\sup_{\|f\|_{L^2}=1} |(f, u - u_h)_{L^2}| \geq |(f_0, u - u_h)_{L^2}| = \|u - u_h\|_{L^2}.$$

Für alle $v \in V_h$ gilt, wegen $F(v) = (F, v)_{L^2}$ und (8.3),

$$\begin{aligned} |(F, u - u_h)_{L^2}| &= |a^*(u^*, u - u_h)| \\ &= |a(u - u_h, u^*)| \\ &= |a(u - u_h, u^* - v)| \\ &\leq K \|u - u_h\|_V \|u^* - v\|_V. \end{aligned}$$

Wir nehmen das Infimum über alle $v \in V_h$ und erhalten aus (8.2)

$$\begin{aligned} |(F, u - u_h)_{L^2}| &\leq K \|u - u_h\|_V \inf_{v \in V_h} \|u^* - v\|_V \\ &\leq C_4 C^* K h \|F\|_{L^2} \|u - u_h\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Schließlich verwenden wir (8.4) und Satz 7.10:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2} &\leq C_4 C^* K h \sup_{\|F\|_{L^2}=1} \|F\|_{L^2} \|u - u_h\|_{H^1} \\ &\leq C_4^2 C^* K h^2 |u|_{H^2}. \end{aligned}$$

Die Behauptung des Satzes folgt mit $C_5 = C_4^2 C^* K$. \square

Wir wollen noch $u - u_h$ in der L^∞ -Norm abschätzen. Dafür benötigen wir ebenfalls eine zusätzliche Voraussetzung.

Definition 8.3 (1) Eine Familie von Triangulierungen $(T_h)_{h>0}$ erfüllt die inverse Bedingung genau dann, wenn es ein $\nu > 0$ gibt, so daß

$$\frac{h}{h_\tau} \leq \nu \quad \forall \tau \in \bigcup_{h>0} T_h$$

gilt, wobei $h_\tau = \text{diam}(\tau)$ und $h = \max\{h_\tau : \tau \in \bigcup_{h>0} T_h\}$.

(2) Eine Familie von Triangulierungen $(T_h)_{h>0}$ heißt quasi-uniform genau dann, wenn sie regulär ist (siehe Definition 7.9) und die inverse Bedingung erfüllt.

Während in regulären Triangulierungen die Elemente nicht zu “schmall” werden können (im Sinne einer unteren Schranke für den kleinsten Innenwinkel aller Finiten Elemente), verhindert die inverse Bedingung, daß die Größe der Elemente (im Sinne des Durchmessers) zu unterschiedlich ist. Die in Abbildung 8.1 dargestellten Triangulierungen sind zulässig, erfüllen aber nicht die inverse Bedingung (wenn man sie sich unendlich fortgesetzt denkt).

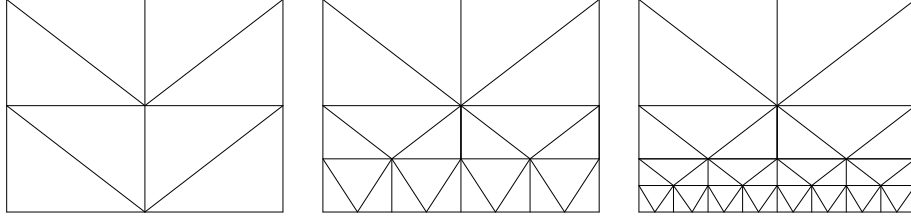


Abbildung 8.1: Zur inversen Bedingung.

Satz 8.4 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 8.2 mit dem Zusatz, daß die Triangulierungen die inverse Bedingung erfüllen. Dann existiert eine von u und h unabhängige Konstante $C_6 > 0$, so daß*

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq C_6 h^{2-d/2} |u|_{H^2}.$$

Beweis: 1. Schritt: Wir zeigen zuerst die inverse Abschätzung

$$\|v\|_{L^\infty} \leq ch^{-d/2} \|v\|_{L^2} \quad \forall v \in X_h. \quad (8.5)$$

Sei $v \in X_h$ und $\hat{v} = v \circ F$ auf $\tau \in T_h$. Da X_h ein endlichdimensionaler Raum ist, sind alle Normen auf X_h äquivalent, und es folgt mit Lemma 7.4 und (7.5):

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^\infty(\tau)} &= \|\hat{v}\|_{L^\infty(\hat{\tau})} \\ &\leq C_{\hat{\tau}} \|\hat{v}\|_{L^2(\hat{\tau})} \\ &\leq C_{\hat{\tau}} |\det B|^{-1/2} \|v\|_{L^2(\tau)} \\ &\leq C_{\hat{\tau}} h_\tau^{-d/2} \|v\|_{L^2(\tau)}. \end{aligned}$$

Die inverse Bedingung impliziert $h_\tau^{-1} \leq \nu h^{-1}$ und daher

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 &= \max_{\tau \in T_h} \|v\|_{L^\infty(\tau)}^2 \\ &\leq C_{\hat{\tau}}^2 \nu^d h^{-d} \max_{\tau \in T_h} \|v\|_{L^2(\tau)}^2 \\ &\leq C_{\hat{\tau}}^2 \nu^d h^{-d} \sum_{\tau \in T_h} \|v\|_{L^2(\tau)}^2 \\ &= c^2 h^{-d} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

wobei $c = C_{\hat{\tau}} \nu^{d/2}$. Dies beweist (8.5).

2. *Schritt:* Wir wenden Satz 7.10 auf $k = 2$, $m = 0$, $q = \infty$, $p = 2$ und $s = 0$ an. Wegen $d \leq 3$ ist (7.13) erfüllt. Wir erhalten

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^\infty} \leq C_4 h^{2-d/2} |u|_{H^2}.$$

Daher folgt mit (8.5) und Satz 8.2

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^\infty} &\leq \|u - \Pi_h u\|_{L^\infty} + \|u_h - \Pi_h u\|_{L^\infty} \\ &\leq C_4 h^{2-d/2} |u|_{H^2} + c h^{-d/2} \|u_h - \Pi_h u\|_{L^2} \\ &\leq C_4 h^{2-d/2} |u|_{H^2} + c h^{-d/2} (\|u_h - u\|_{L^2} + \|u - \Pi_h u\|_{L^2}) \\ &\leq C_4 h^{2-d/2} |u|_{H^2} + c h^{2-d/2} (C_5 + C_4) |u|_{H^2} \\ &\leq C_6 h^{2-d/2} |u|_{H^2}. \end{aligned}$$

Der Satz ist bewiesen. □

Die Sätze 8.2 und 8.4 gelten auch für allgemeine Finite Elemente, die (7.12) und (7.13) erfüllen.

Satz 8.5 *Es gelten (7.12) und (7.13), $d \leq 3$ und $u \in H^k(\Omega)$, $k \geq 2$. Ferner habe das Problem (8.1) für jedes $F \in L^2(\Omega)$ eine Lösung $u^* \in H^2(\Omega) \cap V$ mit*

$$\|u^*\|_{H^2} \leq C^* \|F\|_{L^2}.$$

Dann existiert eine von u und h unabhängige Konstante $C > 0$, so daß

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C_5 h^k |u|_{H^k}.$$

Beweis: Analog zu Satz 8.2 (Übungsaufgabe).

Satz 8.6 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 8.5, und die Triangulierungen erfüllen die inverse Bedingung. Dann existiert eine u und h unabhängige Konstante $C > 0$, so daß*

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq C_6 h^{k-d/2} |u|_{H^k}.$$

Beweis: Analog zu Satz 8.4 (Übungsaufgabe).

Beispiel 8.7 Wir berechnen den L^∞ -Fehler der Finite-Elemente-Diskretisierung von

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega = (-1, 1)^2, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

mit linearen Lagrange-Elementen, wobei

$$f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Wir verwenden unstrukturierte Gitter (d.h. keine Triangulierungen mit regelmäßigen Dreiecken) mit verschiedenen $h > 0$. Die exakte Lösung des kontinuierlichen Problems lautet

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Seien u_h bzw. u_k die Lösungen der diskreten Probleme zu den entsprechenden Triangulierungen mit $h > 0$ bzw. $k > 0$. Nehmen wir die Relationen

$$e_h := \|u - u_h\|_{L^\infty} = Ch^\alpha, \quad e_k := \|u - u_k\|_{L^\infty} = Ck^\alpha$$

an (C hängt nur von f und Ω ab), so können wir durch Elimination von C und Logarithmierung α berechnen:

$$\ln \frac{\|u - u_h\|_{L^\infty}}{\|u - u_k\|_{L^\infty}} = \alpha \ln \frac{h}{k}$$

oder

$$\alpha = \frac{\ln e_h - \ln e_k}{\ln h - \ln k}.$$

Zur Lösung des obigen Problems verwenden wir die PDE-Toolbox der Software Matlab. Das entsprechende Matlab-Programm lautet wie folgt:

```

1: fprintf('Computes L\infty error for Poisson \n\n')
2: fprintf(' -div grad u = f in square, u = 0 on boundary \n\n')
3: fprintf('with f(x,y)=2pi^2 sin(x pi)sin(y pi) in non-uniform
   mesh \n\n')
4:
5: %      Problem definition
6: g='squareg'; % the square
7: b='squareb1'; % 0 on the boundary
8: c=1;
9: a=0;
10: f='(2*pi^2).*sin(x.*pi).*sin(y.*pi)';
11:
12: %      definition of maximal mesh sizes
13: h(1)=0.4; h(2)=0.3; h(3)=0.25; h(4)=0.2; h(5)=0.15; h(6)=0.1;
14:
15: %      computation of solution and of error
16: fprintf('Computes with hmax = %f ... \n', h(1));
17: [p,e,t]=initmesh(g,'hmax',h(1));
18: pdemesh(p,e,t);
19: u=asempde(b,p,e,t,c,a,f);
20: exact=(sin(p(1,:).*pi).*sin(p(2,:).*pi))';
21: error(1)=max(u-exact);
22: fprintf('Error: %e. Node number: %d \n', error(1),size(p,2));

```

```

23: pause;
24:
25: for i=2:6
26:     fprintf('Computes with hmax = %f ...\n', h(i));
27:     [p,e,t]=initmesh(g,'hmax',h(i));
28:     pdemesh(p,e,t);
29:     u=asempde(b,p,e,t,c,a,f);
30:     exact=(sin(p(1,:).*pi).*sin(p(2,:).*pi))';
31:     error(i)=max(u-exact);
32:     fprintf('Error: %e. Node number: %d\n',error(i),size(p,2));
33:     pause;
34:     alpha(i-1)=log(error(i-1)/error(i))/log(h(i-1)/h(i));
35: end
36:
37: fprintf('order of error:\n');
38: for i=1:5
39:     fprintf(' %e\n', alpha(i));
40: end

```

Ruft man dieses Programm (wir nennen es `estimate`) auf, werden die erzeugten Triangulierungen gezeichnet. Um die nächstfeinere Triangulierung anzeigen zu lassen, muß eine Taste betätigt werden. Außerdem werden die folgenden Zeilen ausgegeben:

```

>> estimate
Computes L∞ error for Poisson equation

-div grad u = f in square, u = 0 on boundary

with f(x,y)=2pi2 sin(x pi)cos(y pi) in non-uniform mesh

Computes with hmax = 0.400000 ...
Error: 8.112904e-002. Node number: 55
Computes with hmax = 0.300000 ...
Error: 5.856713e-002. Node number: 89
Computes with hmax = 0.250000 ...
Error: 3.576280e-002. Node number: 123
Computes with hmax = 0.200000 ...
Error: 2.318980e-002. Node number: 177
Computes with hmax = 0.150000 ...
Error: 1.550113e-002. Node number: 329
Computes with hmax = 0.100000 ...
Error: 7.209168e-003. Node number: 724

```

```

order of error:
1.132735e+000
2.705470e+000
1.941331e+000
1.400155e+000
1.888102e+000

```

Nachfolgend erläutern wir das obige Matlab-Programm ausführlich:

- Zeile 6: Die Variable **g** enthält die geometrischen Daten des Quadrats $(-1, 1)^2$, die in der Datei **squareg** definiert sind.
- Zeile 7: Die Variable **b** enthält die Randbedingungen, die in der Datei **squareb1** definiert sind.
- Zeile 8-10: Definition der Daten c , a und f der elliptischen Gleichung $-\operatorname{div}(c\nabla u) + au = f$.
- Zeile 13: Definiert einen Vektor der maximalen Dreiecksseiten.
- Zeile 17: Die Variablen **p**, **e** und **t** sind Variablen, die die Gitterdaten enthalten. Sie werden durch den Aufruf von **initmesh** erzeugt. Die letzten beiden Argumente legen fest, daß die maximale Länge der Dreiecksseiten in der Triangulierung **h(1)** beträgt.
- Zeile 18: Zeichnet die Triangulierung.
- Zeile 19: **assempte** berechnet die approximative Lösung **u** des Randwertproblems.
- Zeile 20: Der Vektor **exact** enthält die Funktionswerte der exakten Lösung u an den Gitterpunkten, die durch **p** definiert sind. Das Zeichen “’” bedeutet Transposition. Dies ist erforderlich, um einen Spaltenvektor zu erhalten.
- Zeile 21: **error** ist der gesuchte L^∞ -Fehler **error(1)**.
- Zeile 23: Das Programm wartet, bis eine Taste gedrückt wird.
- Zeilen 25-31: Berechnet die Fehler **error(i)** für $i = 2, \dots, 6$.
- Zeile 34: Berechnung der Fehlerordnung entsprechend der Fehler für $i - 1$ und i .

Die obigen Fehlerordnungen schwanken recht stark, da h nicht klein genug ist. Die folgende Tabelle zeigt die Fehler e_h zu verschiedenen $h > 0$, die kleiner als im obigen Matlab-Programm sind, und die entsprechenden numerischen Konvergenzordnungen α . Nach Satz 8.4 beträgt die Konvergenzordnung (mindestens) eins, da $h^{2-d/2} = h$ für $d = 2$. Warum sind die numerischen Werte α besser? Das liegt daran, daß die Abschätzung im Satz 8.4 nicht optimal ist. Nitsche konnte

h	Anzahl Dreiecke	e_h	α
0.4	55	$8.113 \cdot 10^{-2}$	—
0.2	177	$2.319 \cdot 10^{-2}$	1.81
0.1	724	$7.209 \cdot 10^{-3}$	1.69
0.05	2849	$2.003 \cdot 10^{-3}$	1.85
0.025	11272	$5.575 \cdot 10^{-4}$	1.85
0.0125	44772	$1.423 \cdot 10^{-4}$	1.97

Tabelle 1:

1977 zeigen, daß die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq Ch^2 |\ln h| \|u\|_{W^{2,\infty}}$$

gilt, wenn $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$. Dies bedeutet, daß der Fehler von der Ordnung $2 - \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ ist. In unserem Beispiel ist sogar $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, so daß die Abschätzung von Nitsche anwendbar ist. Die Werte für α in Tabelle 1 bestätigen dieses theoretische Resultat.

Übungsaufgaben

1. Zeige, daß der Raum $X = \{u \in C^1([-1, 1]) : u(-1) = u(1) = 0\}$, versehen mit der Norm

$$\|u\|_X = \left(\int_0^1 (u(x)^2 + u'(x)^2) dx \right)^{1/2},$$

kein Banachraum ist. (Hinweis: Zeige, daß $u_n(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $x \in [-1, 1]$, in X gegen eine Funktion $u \notin X$ konvergiert.)

2. Untersuche, ob die folgenden Differentialgleichungen elliptisch in $x \in \Omega$ sind:

(a) $\operatorname{div}((x_1^2 + \dots + x_d^2)\nabla u) = f(x_1, \dots, x_d)$ in $\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$;

(b) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$ in $\Omega = \mathbb{R}^2$.

3. Zeige, daß der Laplace-Operator Δ in \mathbb{R}^2 in Polarkoordinaten wie folgt lautet:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

4. Sei $\Omega = (-1, 1)^2$ und betrachte

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \nabla u \cdot \nu = g \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei (in Polarkoordinaten $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$)

$$g(r, \theta) = r^{2/3} \sin((2\theta - \pi)/3).$$

Zeige: $u(r, \theta) = r^{2/3} \sin((2\theta - \pi)/3)$ ist Lösung des obigen Randwertproblems und

$$u \in C^2(\Omega), \quad u \notin C^1(\overline{\Omega}).$$

5. Zeige, daß $u : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = |x|$, eine schwache Ableitung in $L^p(\Omega)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$ besitzt, und berechne sie.

6. Sei $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Zeige: $u \in W^{1,1}(B)$, $u \notin L^\infty(B)$.

7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein Gebiet und sei $u \in L^2(\Omega)$. Zeige: Wenn

$$\int_{\Omega} uv \, dx \geq 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega), \quad v \geq 0 \text{ in } \Omega,$$

dann ist $u \geq 0$ (fast überall) in Ω . Folgere, daß

$$\int_{\Omega} uv \, dx = 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

dann $u = 0$ in Ω impliziert.

8. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $f \in L^2(\Omega)$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine schwache Lösung von

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Zeige: u löst

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \nabla u \cdot \nu = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

9. Bestimme die Basisfunktionen p_1, \dots, p_6 eines quadratischen Lagrangeschen Finiten Elements $\tau = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x, y \geq 0\}$ im \mathbb{R}^2 .
10. Bestimme die Basisfunktionen p_1, p_2, p_3 auf einem linearen Lagrangeschen Finiten Element im \mathbb{R}^2 (Dreieck) mit Eckpunkten $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$.
11. Bestimme die Steifigkeitsmatrix des mit linearen Lagrangeschen Finiten Elementen im \mathbb{R}^2 (Dreiecken) diskretisierte Randwertproblems aus Aufgabe 8 mit $\Omega = (0, 1)^2$. (Hinweis: Zur Vereinfachung wähle eine uniforme Triangulierung aus wenigen Dreiecken.)
12. Berechne die Interpolierende auf dem quadratischen Lagrangeschen Finiten Element im \mathbb{R}^2 mit $\tau =$ Dreieck mit Eckpunkten $(0, 0), (0, 1)$ und $(1, 0)$. (Hinweis: benutze Aufgabe 9.)
13. Beweise die folgende Variante des Lemmas von Bramble-Hilbert: Seien $m \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty$ und sei $F : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ linear und stetig ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $d \geq 1$). Es gelte $F(p) = 0$ für alle $p \in P_{m-1}(\Omega)$. Dann existiert eine von u und F unabhängige Konstante $C > 0$, so daß

$$|F(u)| \leq C |u|_{W^{m,p}} \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

(Hinweis: Satz 4.7 darf natürlich verwendet werden.)

14. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Zeige, daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $u \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\left\| u - \frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_{\Omega} u \, dx \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Diese Ungleichung verallgemeinert die Poincaré-Ungleichung. (Hinweis: Lemma von Bramble-Hilbert.)

15. Beweise Satz 8.6.
16. Beweise Satz 8.7.

Literatur

- [1] R. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- [2] D. Braess. *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer, 1997.
- [3] P. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1978.
- [4] P. Ciarlet. Basic error estimates for elliptic problems. In: *Handbook of Numerical Analysis, Vol. 2*. Editoren: P. Ciarlet und J.L. Lions. Elsevier Science Publishers, 1991.
- [5] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 1983.
- [6] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart 1986.
- [7] M. Renardy, R. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer, Berlin 1993.
- [8] H. Schwarz. *Methode der finiten Elemente*. Teubner, 1980.
- [9] G. Strang, G. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1973.
- [10] G. M. Troianiello. *Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems*. Plenum Press, New York 1987.
- [11] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen. Sobolevräume und Randwertaufgaben*. Teubner, 1982.
- [12] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, Vol. II*. Springer, New York 1990.
- [13] O. Zienkiewicz. *Methode der finiten Elemente*. Carl Hanser Verlag, 1984.